

土木工程研究生系列教材

高等土力学

卢廷浩 刘祖德 等编著
殷宗泽 主 审

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



● ISBN 7-111-17186-1/TU·795(课)

封面设计 / 电脑制作
张静

土木工程研究生系列教材

书名	作者	主审
结构动力学	刘晶波 等	欧进萍
地震工程学	李宏男 等	林 皋
高等土力学	卢廷浩 等	殷宗泽
大跨空间结构	张毅刚 等	沈世钊
高等工程地质学	赵树德 等	朱博鸿
高等岩石力学	刘宝琛 等	蔡美峰
土工合成材料	王 钊 等	王正宏
防灾减灾工程学	江见鲸 等	任爱珠
高等基础工程学	郑 刚 等	顾晓鲁
高等钢结构理论	张耀春 等	钟善桐
岩土工程数值分析	廖红建 等	刘怀恒
高等钢筋混凝土结构学	赵国藩 等	周 氏

ISBN 7-111-17186-1



9 787111 171867 >

定价: 32.00 元

地址: 北京市百万庄大街22号

联系电话: (010) 68326294

邮政编码: 100037

网址: <http://www.cmpbook.com>

E-mail: online@cmpbook.com

土木工程研究生系列教材

高等土力学

卢廷浩 刘祖德 陈国兴 徐日庆 编著
王国体 王 媛 傅旭东 杨小礼
殷宗泽 主审

机械工业出版社

本书是硕士研究生教材,适合于土木、水利水电、交通、环境、地质、市政工程等多专业使用。本书也可作为其他相近专业研究生的选修课教材及相关专业博士研究生的参考书和工程师们的读物。

本书共分13章。内容包括:绪论,土的生成与基本性质,土的固结与流变理论,土的抗剪强度理论,土的渗流理论,土的本构关系,岩土极限分析法,地基应力和沉降实用计算,土坡稳定分析,地基极限承载力计算,土的动力特性,填土的工程性质,土工问题的可靠度分析。本书有完整的结构体系,较为全面系统地介绍了近代土力学的研究成果、研究方法,涵盖了目前本课程教学的主体内容。本书以各类工程问题为基线,注重理论研究与实际应用并重,叙议结合,以宽广的视角介绍了一些新观点、新方法并进行一些必要的讨论。本书阐述简明,深入浅出,循序渐进,图文并茂,便于“教”和“学”。

图书在版编目(CIP)数据

高等土力学/卢廷浩等编著. —北京:机械工业出版社, 2005.8

(土木工程研究生系列教材)

ISBN 7-111-17186-1

I. 高… II. 卢… III. 土力学-研究生-教材

IV. TU43

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 092183 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:季顺利 版式设计:霍永明 责任校对:张莉娟

封面设计:张静 责任印制:洪汉军

北京京丰印刷厂印刷

2006 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm × 1400mm B5 · 12.875 印张 · 501 千字

定价:32.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68326294

封面无防伪标均为盗版

土木工程研究生系列教材编审委员会

顾问: (以姓氏笔画为序)

王正宏	任爱珠	朱博鸿	刘怀恒
刘宝琛	刘祖德	沈世钊	沈祖炎
陈英俊	林 皋	欧进萍	周 氏
周锡元	赵国藩	钟善桐	殷宗泽
顾晓鲁	蔡美峰		

主任委员: 江见鲸

副主任委员: (以姓氏笔画为序)

朱合华	李 奇	李宏男	李爱群
杜修力	陈云敏	张永兴	张素梅
尚守平	姜忻良	夏 禾	徐志胜
廖红建			

委员: (以姓氏笔画为序)

卫 军	王 钊	王清湘	卢廷浩
朱召泉	刘晶波	李正良	李英民
李洪泉	李鸿晶	杨果林	吴知丰
陈国兴	张家生	张毅刚	张耀春
郑 刚	单 建	易伟建	周朝阳
赵树德	徐礼华	袁迎曙	康清梁
盛宏玉			

秘书长: 季顺利

土木工程研究生系列教材 序

随着我国高等教育的发展,普通本科教育已由精英式教育发展成为大众式教育。我国科学技术的高速发展,对具有高级专业知识、高级专业技能的专门人才的需求,日益迫切,这为硕士研究生教育的发展提供了广阔空间。一些高等院校,硕士研究生的招生规模,近年来正以 15%~30% 的速度发展。对一些研究型的重点高校,在“十五”期间,本科生与研究生的招生比例要大致相当。许多高校已获得工程硕士的培养授权,这为研究生培养又开辟了新途径。

硕士研究生招生规模的扩大,对传统的研究生教育模式提出了挑战。过去硕士生的培养基本套用博士生的培养模式,主要靠传帮带的教育模式,而对数量增大的研究生教育,必须建立整建制的培养模式,即要求硕士研究生的教育培养模式向公共化、规范化方向发展。对此,硕士研究生的教材,特别是研究生教育的平台课、学位课的教材建设就显得特别重要了。

机械工业出版社根据当前土木工程研究生教育发展现状,本着“大土木工程”的教育思想,组织国内部分高校土木工程专业教授,对土木工程研究生用教材建设进行了研讨,并组织编写了土木工程研究生系列教材。为保证教材的编写质量,组织成立了教材编审委员会,聘请了一批学术造诣深、德高望重的专家作顾问和教材主审。本套系列教材编写、出版的思路是:先基础课、平台课教材,后专业课教材。教材组织由长期给研究生授课的老师合作编写,达到“学校优势互补,质量上乘”的目标。教材体系设计,本着“重基本理论、重学科发展,结合学生现状和人才培养要求”的原则。教材编写质量,本着“出精品、主编负责、主审把关”的原则,符合国务院学位委员会设定的专业要求。

本套系列教材将于 2005 年陆续出版。我们相信,本套系列教材的出版将对我国土木工程研究生教育的发展和教学质量的提高及人才培养,产生积极作用,为我国经济建设和社会发展作出贡献。

王见安

前 言

高等土力学课程是土木、水利水电、交通、环境、地质等专业硕士研究生的重要专业基础课，是岩土工程专业硕士研究生的骨干学位课程。高等土力学学习以本科阶段土力学知识为起点，但高等土力学将更全面地以更宽广的视角、更深层次、应用多学科交叉的理论和方法对土的性质进行研究，解决更复杂的工程问题，因而从某种意义上讲也是发展中的土力学。许多学校都为研究生开设高等土力学课程，但一直缺乏较为通用的基本教材，一般是以某些专著为基础选择某些篇目、章节讲授或自编讲义进行教学。近年也有一些相应教材出版，但由于各个学校的专业特点不同，迫切需要一本可适合不同专业使用的教材，为此，本着土木工程的教育思想我们编写了这本《高等土力学》教材。本书的特点是：涵盖了目前本课程教学的主要内容；符合循序渐进的认知思路，有完整的结构体系；注重理论介绍与实际应用并重，叙议结合，进行一些必要的讨论；在讲解基本内容的同时，也介绍一些新观点、新方法，给学生留下思考的空间，启发学生创新思维。本书除了作为在读研究生的教材外，也可作为其他相关专业博士生和工程师的参考书或读物，其他相近专业也可将其作为选修课教材使用。

本书内容安排及编写者如下：河海大学卢廷浩编写第1章、第6章；浙江大学徐日庆编写第2章、第3章；武汉大学刘祖德编写第4章；河海大学王媛编写第5章；中南大学杨小礼编写第7章；合肥工业大学王国体编写第8章、第9章；南京工业大学陈国兴编写第10章、第11章；武汉大学刘祖德、傅旭东编写第12章；武汉大学傅旭东编写第13章。

本书是在多所大学许多教师历时两年半的合作努力下和机械工业出版社的大力支持下才得以出版的。本书由卢廷浩教授负责统校，殷宗泽教授担任主审。限于编者水平和时间仓促，讹误之处敬请读者指正。

编 者

主要术语符号表

A : 面积, 范德华常数, 硬化模量	I_1, I_2, I_3 : 第一、第二、第三应力状态不变量
A_f : 与偏应力相应的土样破坏时的孔隙应力系数	I'_1, I'_2, I'_3 : 第一、第二、第三应变状态不变量
a : 用作下标时表示空气或气体, 系数	J : 水力坡降 (水力梯度、渗透比降)
a_v : 压缩系数	J_1, J_2, J_3 : 第一、第二、第三偏应力不变量
B : 各项等压相应的孔隙应力系数, 边长	J'_1, J'_2, J'_3 : 第一、第二、第三偏应变不变量
B_t : 切线体积模量	K : 刚度系数, 劲度系数, 体积模量
C_a : 次固结 (压缩) 系数	K_0 : 静止侧压力系数
C_c : 压缩指数, 曲率系数	K_c : 压实度
C_e : 回弹再压缩指数	K_n : 接触面法向劲度系数
C_u : 不均匀系数	K_s : 接触面剪切劲度系数
C_v, C_h : 土体竖向、水平方向固结系数	K_t : 非线性切线体积模量
c : 土的粘聚力 (一般表达)	k : 渗流系数
c_{cu}, φ_{cu} : 三轴 CU 试验强度参数 (指标)	L, l : 长度
c_u, φ_u : 三轴 UU 试验强度参数 (指标)	M : 重量, $p-q$ 平面上破坏线斜率
c_d, φ_d : 三轴 CD 试验强度参数 (指标)	M, m : 重量, 质量
c', φ' : 有效应力强度参数 (指标)	m_v : 体积压缩系数
D_r : 无粘性土相对密实度	N : 贯入击数, 动荷往复次数
E : 弹性模量	N_c, N_r, N_q : 承载力因数
E_0 : 变形模量	n : 孔隙率, 井径比
E_s : 压缩模量	OCR : 超固结比
E_t : 非线性切变模量	P : 竖向合力, 用于表达百分数或概率
E_c : 击实功	p_i : 分布荷载, 球应力, 平均应力
e : 孔隙比	p' : 有效球应力, 有效平均应力
F : 力, 系数	p_c : 前期固结应力
F_s : 安全系数	Q : 水平力, 水量, 塑性势函数
f_y : 屈服函数	Q_c : 击实冲量
G : 剪切模量	q : 分布荷载, 广义剪应力, 流量
G_s : 土粒相对密度 (土粒比重)	q_u : 地基极限承载力
G_t : 非切线剪切模量	R, r : 半径, 矢径
g : 重力加速度	S : 沉降量
H, h : 高度, 土层厚度, 排水距离, 水头	
I_p, I_L : 塑性指数, 液性指数	

S_t : t 时刻沉降量、土层压缩量

T, t : 时间

U : 固结度

u : 孔隙应力

u_d : 动孔隙应力

u_a, u_w : 孔隙气应力与孔隙水应力

$u_a - u_w$: 非饱和土其质吸力

V : 体积

v : 体积, 速度

w : 含水率, 用于上下标表示水

w_{sp} : 最优含水率

w_p, w_L : 塑限, 液限

u, v, w : x, y, z 方向的位移

X, Y, Z : 体积力, 坐标

\bar{X} : 统计平均值

x, y, z : 坐标

δ : 变异系数

δ_s : 黄土湿陷系数

ϕ : 加载函数

φ_0 : 外摩擦角

σ, ϵ : 应力与应变 (一般表达)

τ, γ : 剪应力与剪应变 (一般表达)

τ_f : 土的抗剪强度

τ_a, γ_a : 动剪应力与动剪应变幅值

$\gamma, \gamma_d, \gamma_{sat}, \gamma'$: 土的重度、干重度、饱和
重度、浮重度 (有效重
度)

σ : 总应力 (一般表达)、均方差

σ' : 有效应力 (一般表达)

e^e, e^p : 弹性应变与塑性应变

ϵ_s, ϵ_v : 广义剪应变与体积应变

λ : 阻尼比, 系数

μ : 泊松比

μ_t : 切线泊松比

$\rho, \rho_d, \rho_{sat}, \rho'$: 土的密度、干密度、饱和
密度、浮密度 (有效密度)

ρ_w : 水密度

σ_c : 试验模拟的前期固结应力

θ : 角度, 体积含水率

目 录

序

前言

主要术语符号表

第1章 绪论	1
1.1 土力学的研究历史与现状	1
1.2 高等土力学的研究内容与方法	2
1.3 关于课程教学	4
第2章 土的生成与基本性质	6
2.1 土的生成与物质成分	6
2.2 土的相及其性质	17
2.3 土的化学性质	26
2.4 土水气相互作用	33
参考文献	36
第3章 土的固结与流变理论	37
3.1 概述	37
3.2 Terzaghi 固结理论	38
3.3 Biot 固结理论	52
3.4 土的大变形固结理论	59
3.5 土的动力固结理论	65
3.6 非饱和土的固结理论	71
3.7 土的流变理论	78
参考文献	86

第4章 土的抗剪强度理论	89
4.1 概述	89
4.2 无粘性土的抗剪强度	89
4.3 粘性土的抗剪强度	104
参考文献	128
第5章 土的渗流理论	129
5.1 土体渗流的基本概念	129
5.2 土体渗流的基本定律	131
5.3 饱和—非饱和土体渗流的基本方程	132
5.4 岩土渗流问题的有限元解法	136
5.5 流网及其应用	140
5.6 饱和土体渗透系数的确定方法	143
5.7 非饱和土体渗透特性	148
参考文献	152
第6章 土的本构关系	153
6.1 土的变形特性	153
6.2 土的非线性模型	160
6.3 土的弹塑性模型理论	167
6.4 土的弹塑性模型举例	179
6.5 土与结构接触面模型	185
参考文献	190
第7章 岩土极限分析法	191
7.1 岩土极限分析法研究概述	191
7.2 基于 Mohr-Coulomb 破坏准则的上、下限定理	195
7.3 岩土极限分析非线性理论及其应用	199
7.4 岩土极限分析法中存在的问题	208
参考文献	211
第8章 地基应力和沉降实用计算	214
8.1 概述	214
8.2 地基土层的自重应力	214
8.3 外荷载作用下的附加应力计算	217

8.4 地基沉降计算的实用方法	222
参考文献	238
第9章 土坡稳定分析	239
9.1 概述	239
9.2 基本条分法	240
9.3 普遍条分法实现	242
9.4 普遍条分法公式	244
9.5 条分法的基本讨论	258
参考文献	258
第10章 地基极限承载力计算	259
10.1 土体的极限平衡理论概述	259
10.2 均质地基极限承载力计算	262
10.3 斜向荷载下均质地基极限承载力计算	274
10.4 双层地基的极限承载力计算	277
10.5 地震作用下地基极限承载力计算	283
参考文献	285
第11章 土的动力特性	286
11.1 概述	286
11.2 饱和砂土的振动液化	288
11.3 饱和粘性土的动强度	304
11.4 饱和土振动孔隙水压力的增长规律	309
11.5 土的动力本构关系	313
参考文献	327
第12章 填土的工程性质	330
12.1 概述	330
12.2 粗粒土的压实和力学特性	331
12.3 粘性土料的压实和力学特性	347
12.4 填方工程的设计、施工与质量控制	355
12.5 填土的湿化变形	361
参考文献	366

第13章 土工问题的可靠度分析	367
13.1 概述	367
13.2 概率分析在土工问题中的应用	369
13.3 可靠度分析方法	389
13.4 土工问题的优化设计	397
参考文献	400

第 1 章 绪 论

1.1 土力学的研究历史与现状

土力学是研究土的物理化学和力学性质及其工程应用的学科。以洞穴为栖身之所的远古人类就对土的性质有初步的感性认识。在漫长的历史进程中,随着生产力的发展和人类生产生活范围的扩大,从建造居屋到简单的工程再到建造较为大型的工程,人们自觉不自觉地应用着对土性质的感性认知和代代相传的经验,创造了灿烂的古代文明并留下了辉煌的遗产,令后人叹为观止的中外例子不胜枚举。在相当长的历史阶段中,人们没有土力学理论的概念,只有工匠们对土性质的感性认知和经验的一代代相传,这一阶段可视为经验积累阶段。

从 18 世纪欧洲的工业革命开始到 1925 年,是土力学理论体系逐渐形成的阶段并发展成为一门独立的学科。18 世纪的欧洲,大规模兴建工业厂房、城市建设、铁路、码头等,遇到了许多与土力学相关的课题,急待解决。1773 年,法国 A. 库伦 (Coulomb) 创立了著名的抗剪强度公式,提出了计算挡土墙土压力的滑楔理论。1869 年,英国 W.J.M 朗肯 (Rankine) 又根据强度极限平衡条件从另一角度推导了土压力计算公式。1885 年,法国 J. 布辛内斯克 (Boussinesq) 求得了弹性半无限空间在竖向集中力作用下的应力与变形的理论解。1922 年,瑞典的 W. 费伦纽斯 (Fellenius) 提出了土坡稳定圆弧滑动分析方法。K. 太沙基 (Terzaghi) 总结了前人的研究成果,提出了土体一维固结理论,于 1925 年发表第一本《土力学》专著,接着又阐述了著名的有效应力原理,标志着土力学已真正发展成为一门独立的学科,形成了基本理论框架,太沙基也作为近代土力学(也有人称为经典土力学)的奠基人名垂青史。

随后土力学学科取得了快速发展。例如, W. 费伦纽斯 (Fellenius, 1927)、D.W. 泰勒 (Taylor, 1937)、A.W. 毕肖普 (Bishop, 1955) 等建立和完善了滑弧稳定分析方法; B.B 索科洛夫斯基 (Соколовский, 1942) 建立了散体静力学; R.A. 巴隆 (Barron, 1948) 提出了沙井固结理论; M.A. 比奥 (Biot, 1941、1956) 发表了三维固结理论和动力方程,有效应力原理得到了广泛的推广应用,等等。在这个阶段土力学理论得到了完善、充实和提高,但土体变形理论和破坏理论还分别局限于弹性介质模型和刚塑性模型。

1963 年,剑桥大学 K.H. 罗斯科 (Roscoe) 等人提出了状态边界概念并据此创立了著名的剑桥弹塑性模型,标志着人们对土性的认识和研究有了飞跃,突

破了先前弹性介质模型和刚塑性模型的局限,土力学学科发展进入了崭新的现代发展阶段。其后的近几十年来,土力学研究取得了多方面的重要进展,例如:土体非线性和弹塑性本构模型研究和应用;非饱和土渗流固结变形与强度理论的研究;土结构渐进破坏理论与损伤力学模型研究;砂土液化理论与动力固结模型的研究;特殊土(淤泥及淤泥质土、黄土、膨胀土、红粘土、冻土、垃圾土等)性质的研究;土的微观力学模型的研究;土与结构相互作用研究以及数值分析与模拟方法的研究,等等。应该指出,土力学理论的发展与应用成就离不开其他学科新理论、新方法的创立与发展进步所带来的试验手段和技术的进步,以及计算手段和计算方法的进步,例如各种新型的精密仪器的应用,计算机的广泛应用等。

1.2 高等土力学的研究内容与方法

尽管土力学学科进入了崭新的现代发展阶段,人们对土的性质已经有了比较深入的了解,也取得了前所未有的工程应用成就。但是,21世纪人类正面临着资源和环境严峻现实的挑战,有许许多多问题需要应用土力学学科知识来解决,仍然需要更全面地深化对土的认识,以期人们对土的认识和应用达到“自由王国”的境界。因此,从这个意义而言,土力学的主要研究内容必须包括如下几个方面:①土的成因、结构、物质组成与相互作用;②土体的应力变形规律;③土体的强度及其稳定性分析;④水在土中的运动及对土应力变形和强度、稳定的影响;⑤采用各种可能的测试方法和手段研究土的物理力学性质;⑥应用土力学的基本原理研究新方法、新工艺、新材料并解决实际工程问题。高等土力学是相对于初等土力学而言的,是建立在已有土力学理论与应用成果基础之上的课程,强调的是全面和深化对土性质的理论研究和应用研究。

在初等土力学中,关于土的变形规律、强度规律、渗流规律以及计算方法等所进行的研究和讨论相对而言是初步的,基本属于经典土力学的范畴。例如:变形规律只局限于单向压缩,饱和土的单向(一维)固结,实际上土的变形和固结是多向的(二维或三维),也未涉及非线性性和弹塑性性计算模型;强度规律以研究无粘性土和粘性土的共性特征为主,未涉及多种类型土强度特征的个性和非线性问题,也未深入讨论土的结构性;固结和强度理论仅局限于研究饱和土,而未涉及非饱和土问题;所介绍的计算方法相对简化,难以模拟计算更为复杂的工程实际情况等。

在高等土力学中,虽然还是围绕土的变形规律、强度规律、渗流规律以及计算方法等展开研究,但是比起初等土力学来,其研究的广度和深度要大得多。仍然要继续研究饱和土,但将更多地注重研究非饱和土;继续研究单向(一维)的变形与固结,更注重多向的(二维或三维)的变形与固结研究;既研究各类土的共性又更关注他们各自的个性,例如结构性土的变形强度特征、各种特殊土的变形强度特征等;既研究土的常用模型及其改进,又更注重土的非线性和弹塑性性

质的研究并建立相应模型。此外,还不断探讨更精密、更方便试验仪器的研制,试验技术研究,合理计算参数取值方法的研究;探讨能够更好模拟实际工程的各类计算方法与应用研究,等等。高等土力学将更全面的以更宽广的视角、更深层次、应用多学科交叉的理论和方法对土的性质进行研究,解决更复杂的工程问题,因而从某种意义上讲也是发展中的土力学。

土力学的研究与其他学科的研究一样,必须经历学习的过程,进而才能进行进一步探索从而才能有所发展和创新。学习既来源于对前人知识的继承,例如书本、工程资料,也来源于人们的实践,同时还来源于其他各种信息资源。高等土力学的理论研究与发展大体上可归纳为三步曲:试验研究或工程调研,理论上的假设、归纳和抽象,模型验证和工程模拟,三者相互依存相互促进。

首先,必须重视试验研究,试验研究是对土性认知的必由之路,是继承和发展前人成果的基点,土工试验在土力学研究及工程应用中具有极其重要的地位。室内试验研究、模型试验研究、现场测试是揭示土的物理力学性质的有效途径,也是取得合理设计计算参数的必要手段,同时又是检验计算模型、计算方法的重要依据。另一方面由于土体的复杂性、多样性及多变性,因而也只有进行系统的试验研究,通过分析大量的测试资料才能进一步研究各类土的共性和个性,推动理论发展。现代土力学研究,将尽可能应用现代的试验仪器、试验方法和先进的测试手段研究土的性质,只有这样人们才能够更好地认识和更精确地描述土。应该指出,目前我国土工试验普遍还处于相对粗糙阶段,例如原位取样技术、原位测试技术、制样技术、模型技术等水平还较低,常用的仪器测试精度不很高;先进仪器匮乏以及对新仪器研制的投入不足等都与发达国家存在着明显的差距。这就要求研究者和工程师们与机械、电子等工程师们合作,应用他们的科技成果创造新的土工试验仪器,研究先进的土工试验技术,包括现场测试技术。

其次,合理地应用假设进行科学的归纳和抽象。处理试验研究成果和工程中的土力学问题时,由于问题的复杂性,有时必须有依据地适当应用假设,抓住问题实质,突出主要矛盾,采用恰当的数学和力学的方法及学科交叉知识进行演绎、归纳,进而对土性进行抽象概括,建立相应的模型,利用模型反映土体性质。应该指出,土力学学科在建立自身理论体系中常常借用或引用其他临近学科的知识成果,当然这种借用或引用应该慎重,必须达到能够确切反映土体应力变形、强度基本性质的要求。

最后,必须进行模型验证。在归纳土体应力变形、强度规律、渗流规律建立相应的模型之后必须进行模型验证。验证的过程也是对假设的求证和对借用或引用其他临近学科知识成果合理与否的检验。简单的说,所建立的模型必须经其他试验(测试)或工程应用来检验其适应性,好的模型应该在一定范围内有其适用性,并能指出其不适用范围。必须指出,由于土的成因多种多样,又是多相体介

质,其物理力学性质十分复杂,期望建立一个普遍适用于任何土类或任意加载条件的模型是不现实的。

目前的理论和试验手段还远不能够准确地揭示、描述和预测土性的全部,但我们的研究目标就是试图努力做到这一点,好的模型应当能够较好的模拟实际工程从而指导工程实践。应该指出,涉及与实际工程有关的土工问题更是复杂,期望完全精确的描述和预测土体应力变形、渗流、破坏是不切实际的,因而经验是不可或缺的。这里经验包括两个方面:一是工程经验,二是理论模型和试验参数的运用经验。经验由两种途径获得,一是由自己直接经验获得,二是通过间接经验获得,两者不偏废方可构筑“经验之塔”。此外,还必须应用理论和经验对实际工程进行模拟和计算方法的研究。

目前,高等土力学的研究可概括为四个环节:即理论研究、试验研究、计算方法和工程应用研究。也正如一些学者所指出的,土力学研究出现四个分支:理论土力学,实验土力学,计算土力学,应用土力学。不论是四个环节也好还是四个分支也好,在高等土力学学科中理论研究、试验研究、计算方法和工程应用研究是相互联系的,是此生彼长循环渐进地发展的。

1.3 关于课程教学

土是天然材料,是颗粒材料的结合体,成因多种多样,是多相体介质,其物理构成和力学性质都十分复杂且具很强的个性。土力学的形成和发展来源于工程实际,反过来又指导工程实际,应用十分广泛。高等土力学课程是土木、水利、交通、环境、地质等专业硕士研究生的重要专业基础课,是岩土工程专业硕士研究生的骨干课程,也是某些专业博士研究生的选修课程;是一门与工程实际密切联系的课程,强调理论学习的同时更应强调土工试验和工程实践对高等土力学学习和创新的重要地位。在本课程学习中强调学生的基础理论和基本工程技能训练并重,注重综合能力的培养,采用理论联系实际的方法,同时,结合科研工作、学位论文的撰写吸收前人的知识成果并有所创新。强调土工试验在高等土力学学习中的重要性,是学习和发展高等土力学的重要手段。既有理论创新又动手能力强的人员才符合社会对人才的要求。

通过本课程的教学活动,从认知角度要求学生:①了解土的物质组成,基本物理、化学性质,初步掌握土的微观结构与一般性质;②深化有效应力原理概念,掌握土的二维、三维固结理论,土的大变形固结理论与流变理论并用于计算实际工程问题,了解非饱和土的固结理论;③进一步深化土的抗剪强度理论,掌握土的破坏过程、破坏形态与破坏准则以及土的抗剪强度取值标准;④掌握土的渗流理论和渗流基本方程的应用,了解渗透变形机理并应用于实际工程的渗流控制;⑤了解土的非线性和弹塑性变形特性,掌握并应用土的非线性和弹塑性模型

的基本理论以及土与结构的接触面模型概念与方法；⑥掌握土的塑性极限分析理论和滑移线理论和应用；⑦学会多种方法的地基应力计算，熟练计算地基沉降包括各向异性土和成层土的地基沉降的各种计算模型和计算方法，掌握试验方法与沉降计算参数的确定；⑧掌握多种分析土坡的方法，从机理上分析土坡稳定的原理并提出边坡防护与滑坡治理的可能措施；⑨掌握应用土的极限平衡条件来计算浅基础、深基础以及倾斜荷载和双层地基的极限承载力，掌握确定地基承载力的其他理论和测试方法；⑩了解土的动力变形和强度性质，掌握饱和砂土的振动液化的判别与治理方法，掌握土的动力本构关系的建立与参数确定；⑪了解现场压实试验和粗粒土料、粘性土料的压实和力学特性，看懂填方工程的设计、施工与质量控制原理，掌握填土的湿化变形特性和湿化参数的测试；⑫了解土工问题的可靠度分析的意义及土工问题可靠度的分析方法和优化设计原理。

教学中，教师不仅要注重教学方法和教学内容的改革，如进行启发式的教育，注重培养学生的自学能力，激发学生的学习主观能动性，并培养他们的综合能力及创新精神。还应考虑到该课程的特点，强调学生的基础理论和基本工程技能训练并重，并强调试验和试验成果分析在高等土力学教学中的地位。高等土力学理论的发展必须依赖于工程实践，同时又需要用理论来指导工程实践，在解决一系列工程问题中获得了新的发展，这就强调了实践的第一位性。在课堂教学中引导学生积极思维，揭示矛盾，加强学生的联想能力、发散思维能力，鼓励创新；其次是在课堂讲授中淡化繁琐的数学推导过程与数字运算，强化定性分析，强化基于基本概念的直观判断，突出分析思路和分析方法。再者还应引导学生自己思考，为学生留出充分的思维空间。

“教学”是“教”和“学”两个方面的统一体。通过本课程的教学活动，从创新角度要求学生：在掌握或了解课程知识的同时，发现现有课程内容的成熟程度、不完善之处甚至研究空白。培养学生的创新思想，认识高等土力学是发展中的土力学，要求学生提出值得进一步改进或深入研究的课题，制定一、两个课题的研究目标并提出研究路线和方法。应该指出，本书所列内容远非高等土力学的全部，学习本课程只是学习和研究工作的起步，是将来从事研究和工程实践的基础。尽管从事不同专业或研究方向的学生学习与应用土力学的侧重点有所不同，但希望他们不要只局限于本书的学习，还要大量阅读其他文献著作，关注其他的信息来源，注意发挥交叉学科在创新方面的作用。

人类社会经济发展日新月异，现在和将来都有大量的工程需要兴建，例如高层建筑、大型厂房、大型水利枢纽工程、海岸工程、高速公路、高速铁路、机场、大型桥梁、隧道与地下交通工程、地下停车场与人防工程、工业与生活废弃物处理等都提出了许多岩土工程课题，给青年岩土工作者提供了施展才华的舞台，然而这恰恰又是赋予他们应肩负的历史重任。

第2章 土的生成与基本性质

2.1 土的生成与物质成分

土是由岩石在风化作用下形成的大小悬殊的颗粒,经过不同的搬运方式,在自然环境中生成的沉积物。风化作用包括物理的、化学的、生物的作用。物理作用包括风、水、冰川、热胀冷缩、加载卸载以及冻融交替作用等;化学作用包括水解作用、离子交换作用、氧化还原作用、碳化作用等;生物作用包括微生物、植被、树木、人与动物活动等对岩土的作用。

土的物质成分包括作为土骨架的固态矿物颗粒、孔隙中的水和溶解物质以及气体。因此,土是由颗粒(固相)、水(液相)和气(气相)所组成的三相体。土的三相组成物质的性质、相对含量以及土的结构构造等各种因素,必然在土的轻重、松密、干湿、软硬等一系列物理性质和状态上有不同的反映。因此,土的结构及其物理力学性质与土的形成历史密切相关。

2.1.1 土的生成

由岩石风化形成的土可能留存在原地,也可能经过风、水或冰川的剥蚀和搬运作用,在别处沉积形成土层。留存在原地的土称为残积土;由风的剥蚀和搬运作用而在别处沉积的土称为风成沉积土。风成沉积土包括黄土、砂丘;由水的侵蚀和搬运作用在别处沉积的土称为沉积土。随着水流的过程,根据不同的沉积条件可分为:坡积土、洪积土、山区河谷冲积土、平原河谷冲积土、湖相沉积土、三角洲沉积土、海相沉积土等;由冰川活动的剥蚀和搬运作用在别处形成的土称为冰川沉积土。除了由岩石风化形成土外,植物分解也形成土,如泥炭土、腐植土等。

残积土的特性在很大程度上取决于母岩的性质,残积土与母岩两者的矿物成分相差不大。残积土与基岩之间没有明显的界限,通常经过强风化层、弱风化层过渡到新鲜岩石(图2-1)。残积土与强风化层很难区分,残积土常常是由于雨、雪水流将细颗粒带走后残留的较粗颗粒的堆积物。残积土未经搬运,故土体颗粒

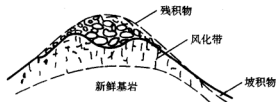


图2-1 残积土

未被磨圆和分选，没有层理构造，土体孔隙较大，均质性也较差。

黄土是以风力搬运堆积而成的黄色粉状土。未经次生扰动不具层理的称为原生黄土，原生黄土经过流水侵蚀、搬运重新沉积形成的黄土称为次生黄土或黄土状土。根据形成的年代又可分为老黄土和新黄土。我国黄土地区面积约 60 万 km^2 ，主要分布在甘、陕、晋、宁夏等西北和华北地区。黄土组成以粉粒为主，具有肉眼可见的大孔隙，结构强度较高，压缩性较小。但有的黄土，在自重应力或自重应力和附加应力共同作用下，受水浸湿后土体结构迅速破坏而发生显著附加下沉，这类黄土称为湿陷性黄土。前者称为自重湿陷性黄土，后者称为非自重湿陷性黄土。

风成沉积土除黄土外还有砂丘。当大面积砂性土露出地面后，烈风可以把它搬运到一定距离之外，到风速减小时落下形成砂丘。在风力作用下，砂丘也可以在地面上移动。由于风的选分作用，砂丘的砂在颗粒大小上表现极不均匀。

雨水和雪水由河流的发源地，从四面八方，经小河汇成大河，浩浩荡荡流入大海，一路上侵蚀、搬运土层，形成各种新的沉积土。河道坡降大，水流急，侵蚀能力强，搬运能力大。河道坡降小，水流变缓，粗颗粒沉积下来。搬运距离长，土颗粒磨圆磨细。水位的季节性变化以及每年洪水位的差异造成水成冲积土的层理构造，河道和湖泊的变迁使水成冲积土构造更为复杂。

坡积土是岩石风化物经雨水、雪水冲刷侵蚀、携带，沉积在较平缓的山坡上形成的沉积物（图 2-2）。搬运作用很短，坡积土土质不均匀，厚度变化大，尤其是新近堆积的坡积土，土质疏松，压缩性高。

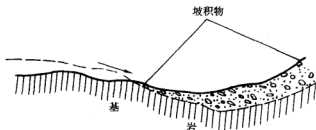


图 2-2 坡积土

洪积土是山洪急流冲刷地表土层，形成泥石流，在山谷冲沟出口或山前倾斜平原上形成的堆积物（图 2-3）。由于山洪常常是周期性产生的，且每次大小并不相同，故每次堆积物性质也不一样。洪积土常常有不规则交错的层理构造，如具有夹层、透镜体等。洪积土土质不均匀。

冲积土是河流水力作用将坡积土和洪积土侵蚀、搬运、沉积在河流坡降变小的平缓地带形成的沉积物（图 2-4）。周期性的洪水也会剥蚀河流上游两岸的冲积土，搬运至下游再次形成冲积土。有的经一次一次搬运直到形成海相沉积土。由于搬运距离长，搬运作用显著，碎屑物质由带棱角颗粒（块石、碎石及角砾）经滚磨、碰撞形成圆形或准圆形颗粒（漂石、卵石及圆砾）。搬运距离越长，沉积的物质越细。正常流量时，河水仅在河床中流动。在洪水期，携带大量泥沙的河

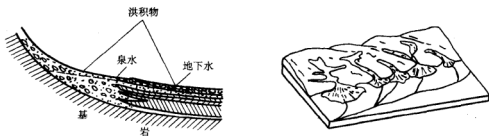


图 2-3 洪积土

水泛滥于河床两侧的河漫滩，流速减慢，泥沙沉积。一般河流横断面可由河床、天然冲积堤、河漫滩或泛滥平原三部分组成。山区河流坡降大，流速急，河漫滩范围小；平原河流坡降小，流速慢，河漫滩范围大。山区河流与平原河流的差异性造成了山区河谷冲积土与平原河谷冲积土的区别。前者冲积土颗粒粗，后者颗粒细。河漫滩沉积土一般都有层理，有时夹细砂层，不会遇到很厚的均匀粘土层。但在河流下游靠近河口处，河流冲积物可具有很大的厚度和范围。需要注意的是与河漫滩沉积土不同，在牛轭湖中沉积的粘土是一种河道淤塞沉积物，通常处于欠固结状态，液性指数接近 1.0。牛轭湖沉积物就是在表面变干，硬壳层下的粘土也依然很软。硬壳层又可能被河漫滩沉积物覆盖。在现场勘测中需要特别注意。

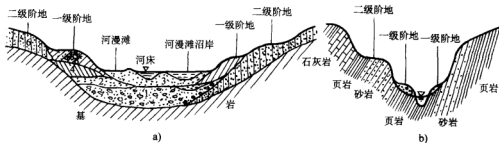


图 2-4 冲积土
a) 平原河流 b) 山区河流

湖相沉积土比较复杂，其成分变化较大。在湖边沉积土颗粒较粗，在近岸带沉积多数是粗颗粒的卵石、圆砾和砂土，在远岸带沉积的是细颗粒的砂土和粘性土，在湖中心区沉积的是粘土和淤泥，常夹有细砂、粉砂薄层。湖泊如果逐渐淤塞，则可演变成沼泽，形成沼泽沉积物。沼泽沉积土主要是由半腐烂的植物残余体组成。泥炭土含水率极高，渗透性差，压缩性很高，抗剪强度很低。

三角洲沉积土是河流流至海洋时流速急剧减少，河水中所携带的悬浮物质在河口形成的沉积土（图 2-5）。悬浮物质中较粗部分在靠近河口处沉积，而细粒部

分在远离河口的近海处沉积。三角洲沉积土取决于河流悬浮物质情况、水流情况以及气候因素。虽然三角洲沉积物构造非常复杂,但通常可以分为三个基本部分:顶积层、前积层和底积层。也可分为水上部分和水下部分。水上部分沉积主要是河床加河漫滩冲积物(包括砂、粉砂、粘土)。由于多次沉积常有层理或透镜体。水下部分沉积

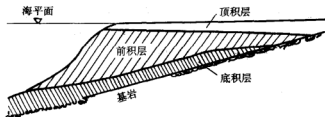


图 2-5 三角洲沉积层示意图

由河流的冲积物和海或湖的沉积物交替或混合组成,呈倾斜的沉积层,层理比较复杂。

海相沉积土按照海水深度分区而不同,可分为滨海沉积物、浅海沉积物、陆坡沉积物和深海沉积物(图 2-6)。滨海区是指高潮位时淹没,低潮位时露出的地带。滨海沉积物主要是由卵石、圆砾和砂等粗颗粒土组成。浅海区指大陆架,水深 0~200m,宽度 100~200km。浅海沉积物主要是细颗粒砂土、粘性土、淤泥和生物化学沉积物。离海岸愈远,沉积物质颗粒愈细小。陆坡区是指浅海区和深海区的过渡陡坡地带。陆坡和深海沉积物主要是棕色粘土和含钙及含硅的软泥。

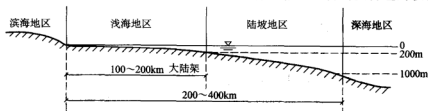


图 2-6 海相沉积土

冰川活动具有极大的搬运能力,沉积作用是在融化过程中发生的。冰川沉积土的特性取决于其搬运土的种类、搬运距离、坡度、压力等因素。根据冰川环境不同形成冰川沉积物、冰川-河流沉积物和冰川-湖泊沉积物。

上述各种沉积物,无论风成沉积土还是水成沉积土,或是冰川沉积土,在沉积后还会受物理、化学作用,产生沉积后的变化。沉积后的物理、化学过程主要有下述几个方面:

1. 风化作用

当沉积物暴露在大氣中,风化作用可以引起土的成分逐步改变。暴露的细粒沉积物处于干燥状态会产生收缩现象,导致风化过程的加速。复杂的物理化学反应使软粘土地基地面表层形成类似超固结状态的硬壳层。

2. 固结作用

沉积土在上覆土重力作用下产生固结，土体孔隙比减小，强度提高。固结过程也称压密过程。地基中地下水位下降也会使土体产生压密。地震以及人类活动引起的动荷载也会使土体产生压密，特别是无粘性土效果更明显。

3. 自生作用和成岩作用

自生作用是指沉积土在沉积处形成新的矿物。自生作用可以使得土颗粒变得更有棱角、孔隙比减小和渗透性降低。

成岩作用是指因温度、压力和时间效应使沉积土由一种物质转化成另一种岩性类物质。

4. 溶解作用

环境的改变可以导致离子交换和可溶盐的淋溶。沉积物可以被不均匀的溶解作用以及紧接着的淋溶作用从沉积土中迁移。土洞、溶洞是溶解作用的结果。

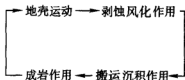


图 2-7 地质循环

地球表面所经历的地质作用有四个基本过程：地壳运动、剥蚀风化作用、搬运沉积作用、成岩作用，它们形成一个永无休止的循环过程（图 2-7）。

2.1.2 土的矿物成分

土是一种三相体，即由固相、液相和气相组成。一种土的固相部分可以含有各种各样的结晶质粘土矿物和非粘土矿物、非晶质粘土矿物、有机质、以及沉淀析出的盐类。在实际工程中遇到的多数土的固相，绝大多数是由无机质结晶矿物组成，并且非粘土矿物的含量比粘土矿物含量多得多。虽然粘土矿物含量少，但粘土矿物成分对土体性状的影响较大，远远超过其相对数量的影响。

下面对土的矿物成分作简要介绍：

1. 非粘土矿物

非粘土矿物又称原生矿物，通常是岩石碎屑或是形成岩石结构的矿物颗粒。砾石、砂和粉砂都是由非粘土矿物组成的。许多土源于火成岩矿物，其中最普遍的成分（质量分数）是长石（约占 60%），辉石和角闪石（约占 17%），石英（约占 12%），云母（占 4%），其他矿物（约占 7%）。然而在大多数土中，含量最丰富的是石英、也有少量长石、云母。其原因是：角闪石和辉石的晶体结构和成分在风化过程中很快被破坏，长石也在化学风化过程中减少着数量，而石英具有很高的稳定性。

石英是由结合成螺旋式结构的硅氧四面体聚合群组成的，四面体中所有的氧原子都同硅原子成键。四面体结构具有很高的稳定性。石英属于一种氧化物，该

结构中无弱键结合的离子，因而具有很高的硬度。这些因素决定了石英具有很好的耐久性。

长石是一种具有空间框架结构的硅酸盐矿物，该矿物中有部分硅原子被铝原子所置换。由于这种置换所产生的多余的负电荷，需要如钾、钙、钠、铯、钡这样一些阳离子来平衡。当这些阳离子相对较大时，则它们的配位数目就较多。由此产生开放式结构和单元间成键强度的降低，结果出现解理面，硬度降低，且容易破碎。同火成岩石相比，土中长石含量大为降低。

云母是由四面体和八面体单元组成的片状结构。该片状结构是一片一片叠合起来的，并且主要是由钾离子在层间由12重配位结合而成。云母具有完整的基本解理面。

非粘土矿物的物理特性主要由矿物类型、颗粒粒径、形状、组构特性和大小分布范围来确定。非粘土矿物化学性质稳定或较稳定，具有强或较强的抗水性和抗风化能力，可以看作惰性较大的物质，它们间相互作用的本质属于物理作用。

2. 粘土矿物

粘土矿物属次生矿物，是原生矿物经进一步化学风化形成的。粘土矿物结构中具有两个基本的单元：一个是硅氧四面体，它是由一个硅离子在四个方向与四个氧离子配位；另一个是铝氧八面体或镁氧八面体，它是由一个铝离子或一个镁离子同六个氧离子或氢氧基进行八面配位。这两个基本单元的示意图分别如图2-8和图2-9所示。

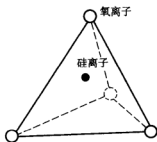


图2-8 硅氧四面体

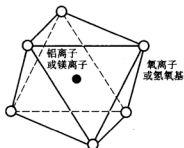


图2-9 铝氧八面体或镁氧八面体

大多数粘土矿物结构中，硅氧四面体连接成片状晶体结构，常称为硅氧晶片。其氧原子间的距离为0.255nm，硅离子的空间高为0.055nm，硅氧晶片的厚度为0.463nm。八面体氧原子间的距离为0.260nm，氢氧基间的距离为0.294nm，而同阳离子进行八面体配位的空间高为0.061nm，八面体晶片厚度为0.505nm。如果配位的阳离子是三价的，那么只有2/3的阳离子空间被正常填充，这种结构称为双八面体。对含有三价铝的情况，其组成为 $\text{Al}_2(\text{OH})_6$ ，自身结合可得到水铝石。在粘土矿物结构中，铝八面体常称为水铝石晶片。如配位的阳离子是二价

的，则所有的阳离子位置都能被填满，这种结构称为三八面体。对含有二价镁的情况，其组成是 $Mg_3(OH)_6$ ，得到的是水镁石。在粘土矿物结构中，镁八面体常称为水镁石晶片。

粘土矿物种类很多，主要有高岭石、蒙脱石、伊利石和绿泥石。

(1) 高岭石 高岭石结构示意图如图 2-10 所示。硅氧晶体的顶点和铝氧（或镁氧）八面体晶片中的原子平面之一共用。该四面体的所有顶点都向着相同的方向，指向晶胞的中心。一般在两层共用的原子晶面中，有 $2/3$ 的原子是氧原子，且它们是被硅原子和八面体的阳离子共用的。在这个平面中，剩下的是氢氧基，每一个氢氧基都位于硅四面体底形成的六角形网格的空洞的正下方。高岭石结构式为 $(OH)_4Si_4Al_4O_{10}$ 。高岭石颗粒在低 pH 值（酸性）环境中带正电荷，而在高 pH 值（碱性）环境中带负电荷。在低 pH 值条件下测得的离子交换容量低，而在高 pH 值条件下可以得到高的离子交换量。高岭土的比表面积范围为 $10 \sim 20m^2/g$ 。

高岭石水稳定性好，可塑性低，压缩性低，亲水性差。

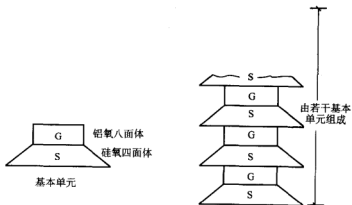


图 2-10 高岭石结构示意图

(2) 蒙脱石 蒙脱石结构示意图如图 2-11 所示，它由二个硅氧晶片夹一个八面体晶片组成。所有四面体的顶点都指向晶胞的中心，构成四面体顶点的氧原子也被八面体晶片所共用。八面体晶体中所含有的剩余氢氧基阴离子直接落在硅四面体的底部所形成的上部和下部六边形空洞中。蒙脱石的结构式为 $(OH)_4Si_8Al_4O_{20} \cdot nH_2O$ 。蒙脱石中铝离子和硅离子的位置广泛地被其他阳离子置换。八面体晶片中的铝离子可以被镁离子、铁离子、锌离子、镍离子、锂离子或其他阳离子所置换。在四面体晶片中，铝离子可以置换 15% 的硅离子。

有些硅离子的位置也可以被磷离子所占据。由于蒙脱石类矿物中存在大量的非平衡置换，因而表现出很强的阳离子交换能力。蒙脱石的比表面积是非常大

的, 外比表面积 (不包括层间颗粒表面积) 通常在 $50 \sim 120\text{m}^2/\text{g}$, 总比表面积的范围可达 $700 \sim 800\text{m}^2/\text{g}$ 。蒙脱石可塑性高, 压缩性高, 强度低, 渗透性小, 液限可达 $150\% \sim 700\%$, 塑性指数可达 $100 \sim 650$ 。

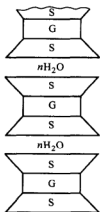


图 2-11 蒙脱石结构示意图

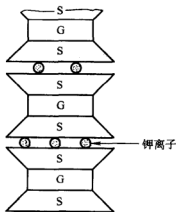


图 2-12 伊利石结构示意图

(3) 伊利石 伊利石结构示意图如图 2-12 所示。它是由硅氧晶片—水铝石晶片—硅氧晶片三层相间构成。每片硅氧晶片的所有四面体顶点都指向中心, 并与八面体晶片中的离子共用。伊利石的结构式为 $(\text{OH})_2\text{K}_2(\text{Si}_6\text{Al}_2)\text{Al}_4\text{O}_{20}$ 。伊利石的阳离子可交换容量小于蒙脱石, 大于高岭石。伊利石的外比表面积为 $65 \sim 100\text{m}^2/\text{g}$, 总比表面积可以高达 $870\text{m}^2/\text{g}$ 。伊利石力学性质介于高岭石和蒙脱石之间。

(4) 绿泥石 绿泥石结构示意图如图 2-13 所示。它是由硅氧晶片与八面体晶体交替叠合而成。土中绿泥石总是以混合物的形式同其他粘土矿物混存在一起。对绿泥石的研究报道较少, 其性质类似伊利石。

3. 非晶质粘土矿物

非晶质粘土矿物包括水铝石英和各种胶体氧化物和含水氧化物。水铝石英是非晶质的硅酸盐粘土矿物的通称。水铝石英没有固定的成分和确定的形状, 它可以表现出各种各样的物理性质。凡含有水铝石英的粘土, 都具有较高的灵敏性和活动性。最常见的是铝、铁和硅的氧化物和氢氧化物。这些氧化物以胶凝质或沉淀物的形式存在, 或包裹着矿物颗粒, 或把矿物颗粒胶结在一起。

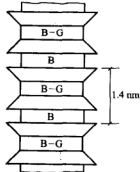


图 2-13 绿泥石结构示意图

4. 有机质

土的有机质来源于动、植物遗体。土中未腐烂的有机质在有空气存在的条件下易受细菌侵蚀。侵蚀的最终产物是一类非常复杂的有机化合物, 可称为腐植

质。

有机物质将吸收大量的水,有时可高达自重的五倍。土中含有有机质使土的抗剪强度降低,压缩性增大。有机质的存在妨碍水泥的凝固,因此对有机质含量高的土采用水泥加固需慎重。

5. 溶解盐类

凡是土中水渗过的地方,水就能输送溶解盐类。根据在水中的溶解度大小,可分为易溶盐、中溶盐和难溶盐。易溶盐包括全部氯盐,钾、钠的碳酸盐和硫酸盐,如 NaCl 、 KCl 、 $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ 、 $\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ 等;中溶盐主要有 $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$;难溶盐主要有 CaCO_3 和 MgCO_3 。按工程观点,盐类中最需要重视的是硫酸盐,因为它对混凝土和金属有腐蚀作用。

2.1.3 土的结构

土的结构与构造对土的性质有很大影响。土的结构是指由土粒单元的大小、形状、相互排列及其联结关系等因素形成的综合特性。土的天然结构是在其沉积和存在的整个历史过程中形成的,因其组成、沉积环境和沉积年代不同而形成各种各样很复杂的结构。一般可以分为单粒结构、蜂窝结构、絮状结构和分散结构等类型(图 2-14)。

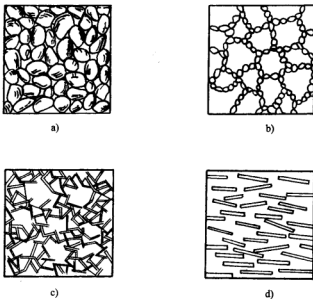


图 2-14 土的结构

a) 单粒结构 b) 蜂窝结构 c) 絮状结构 d) 分散结构

单粒结构是由粗大土粒在水或空气中下沉而形成的，全部由砂粒及更粗土粒组成的土都具有单粒结构。因其颗粒较大，土粒间的分子吸引力相对很小，所以颗粒间几乎没有联结，至于未充满孔隙的水分只有可能使其具有微弱的毛细水联结。单粒结构可以是疏松的，也可以是紧密的（图 2-14a）。呈紧密状单粒结构的土，由于其土粒排列紧密，在动、静荷载作用下都不会产生较大的沉降，所以强度较大，压缩性较小，是较为良好的天然地基。具有疏松单粒结构的土，其骨架是不稳定的，当受到振动及其他外力作用时，土粒易于发生移动，土中孔隙减少，引起土的很大变形，因此，这种土层如未经处理一般不宜作为建筑物地基。

蜂窝结构是主要由粉粒（ $0.005 \sim 0.075\text{mm}$ ）组成的土的结构形式。据研究，粒径在 $0.005 \sim 0.075\text{mm}$ 左右的土粒在水中沉积时，基本上是以单个土粒下沉，当碰上已沉积的土粒时，由于它们之间的相互引力大于其重力，因此土粒就停留在最初的接触点上不再下沉，形成具有很大孔隙的蜂窝状结构（图 2-14b）。

当粘粒在海水中沉积时，由于水中盐类的离子含量很大，减少了颗粒间的排斥力，所以土的结构是面一边接触的絮状结构。粘粒凝聚如絮状的集粒（粘粒集合体）而下沉，并相继和已沉积的絮状集粒接触，而形成类似蜂窝而孔隙很大的絮状结构（图 2-14c）。絮状结构具有较大的孔隙，对扰动比较敏感，性质比较均匀，且具有各向同性。

当粘粒在淡水中沉积时，因为淡水中缺少盐类，所以粘粒或集粒间的排斥力可以充分发挥，沉积物的结构是定向（或至少半定向）排列的，即颗粒在一定程度上平行排列，形成面对面的片状堆积，称为分散结构（图 2-14d）。分散结构的特点是密度较大，土在垂直于定向排列的方向和平行于定向排列的方向上的性质不同，即具有各向异性。

具有蜂窝结构和絮状（或分散）结构的粘性土，其土粒之间的联结强度（结构强度），往往由于长期的压密作用和胶结作用而得到加强。

粘土的性质主要取决于集粒间的相互联系与排列。粒径小于 0.005mm 的呈片状或针状的粘粒，能够在水中长期悬浮，不因自重而下沉。表面带负电荷，而在片的断口处有局部的正电荷，因此在土粒聚合时，多半以面一边或面一面（错开）的方式接触，如图 2-15 所示。

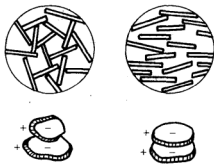


图 2-15 粘粒的接触方式

2.1.4 土的构造

土的构造指同一种土层中物质成分和颗粒大小等都相近的各部分之间的相互

关系的特征，一般可分为层理构造、裂隙构造和分散构造。

1. 层理构造

土粒在沉积过程中，由于不同阶段沉积的物质成分、颗粒大小或颜色不同，它们沿竖向呈现的层状特征，即为层理构造。常见的有水平层理构造和带有夹层、尖灭和透镜体等交错层理构造（见图 2-16）。

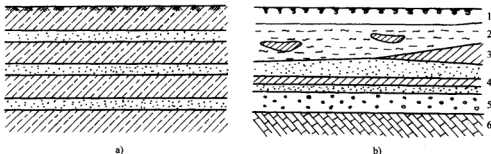


图 2-16 土的层理构造

a) 水平层理 b) 交错层理

1—表土层 2—淤泥夹粘土透镜体 3—粘土尖灭层 4—砂土夹粘土层 5—砾石层 6—石灰岩层

2. 裂隙构造

在裂隙构造中，土体被许多不连续的小裂隙所割裂，在裂隙中常充满各种盐类沉淀物（图 2-17）。不少坚硬和硬塑状态的粘性土具有此种构造，黄土具有特殊的柱状裂隙。裂隙的存在大大降低土体的强度和稳定性，增大了透水性，对工程不利。此外，土中的包裹物（如腐植物、贝壳、结核体等）以及天然或人为的洞穴等的存在也会造成土的不均匀。

3. 分散构造

在颗粒搬运和沉积的过程中，经过分选的卵石、砾石、砂等，沉积厚度常常较厚，没有明显的层理，呈现分散构造（图 2-18）。具有分散构造的土层中各部分的土粒无明显差别，分布均匀，各部分性质亦接近，可作为各向同性体看待。

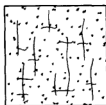


图 2-17 裂隙构造

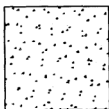


图 2-18 分散构造

2.2 土的相及其性质

2.2.1 相的定义

非饱和土是一种多相混合物。混合物的一部分要成为独立的相，必须满足以下两个条件：①具有与相邻物质不同的性质；②具有明确的分界面。相的状态可能发生变化，如水冻结成冰，冰脱离水，成为一个独立的相。根据上面所述相的定义，可以认为非饱和土由固相、液相、气相和收缩膜四相组成。

收缩膜是非饱和土中的水—气分界面，它的最显著的特性就是能够承受拉力，在张力作用下像弹性薄膜那样交织于整个土的结构中，这个特性称为“表面张力”。在收缩试验（即让一小块土样在大气中逐渐变干）中，作用于土样上的总应力保持为零，而土样的体积逐渐缩小。在试验过程中，负孔隙水压力不断增大，收缩膜就会像一张薄的橡胶膜那样将土颗粒拉在一起。收缩膜的大部分性质都不同于水相。例如，其密度较小，热传导较大，双折射数据同冰相似；从液态水转化为收缩膜的过程是明显而突变式的。

从体积—质量关系看，可将非饱和土当作三相体，因为收缩膜的体积很小，其质量可视作水质量的一部分。但将其作为多相连续体进行应力分析时，应将水—气分界面当作独立的相看待。将非饱和土视作四相体，有利于对土单元进行应力分析。可以这样看待，非饱和土中有两相（即土粒和收缩膜）是在外加应力梯度作用下达到平衡，而另外两相（即空气和水）是在外加应力梯度作用下产生流动。

2.2.2 相的性质

非饱和土由固相、液相、气相和收缩膜组成。图 2-19 表示非饱和土的一个单元，当气相连续时，收缩膜同土粒发生相互作用，影响土的力学性状。如气相是封闭气泡，则流体将变成显著可压缩。

每个相的质量和体积可用相的图解表示，图 2-20a 表示非饱和土的四相图解。收缩膜只有相当于几个分子层的厚度，因此建立非饱和土的体积—质量关系时，可将收缩膜视作液相的一部分而没有太大误差。这样，求解体积—质量关系时，可采用简化的三相图解，如图 2-20b 所示。“土粒”指的是所有土颗粒的质量或体积

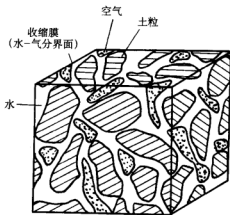


图 2-19 气相连续的非饱和土单元

的总和。下面对固相、液相、气相和收缩膜的基本性质进行阐述。

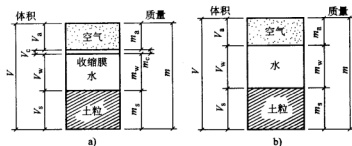


图 2-20 相的图解

a) 非饱和土严格的四相图解 b) 简化的三相图解

1. 密度和比体积

质量与体积之比，称为密度 ρ 。土的各相的密度可从图 2-21 所示的图解中求得。密度的倒数通常称为比体积 v_0 ，比体积是体积与质量之比。

(1) 固相 土粒密度 ρ_s 定义如下

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} \quad (2-1)$$

土粒相对密度通常用量纲为 1 的变量 G_s 表示，常称为土粒比重。土粒相对密度等于土粒的密度与水在 4°C 和一个大气压下的密度之比，即

$$G_s = \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (2-2)$$

(2) 液相 水的密度 ρ_w 定义如下

$$\rho_w = \frac{m_w}{V_w} \quad (2-3)$$

水除了可能受氢、氧的同位素和盐造成的影响之外，基本上是一种均匀物质。具有饱和蒸汽压的蒸馏水称为纯饱和水，纯饱和水的密度应通过试验测定。图 2-22 表示纯水在不同压力和温度下的密度。

在土力学中，因温度不同而造成的水的密度变化，比因压力不同而造成的变化要重要得多。在等温情况，通常取水的密度为 1000 kg/m^3 。

(3) 气相 空气的密度 ρ_a 可定义如下

$$\rho_a = \frac{m_a}{V_a} \quad (2-4)$$

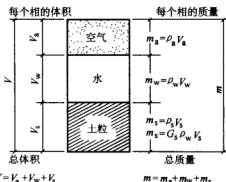


图 2-21 非饱和土的三相图

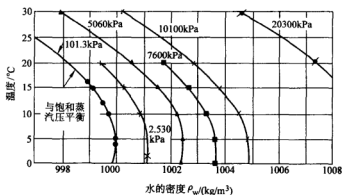


图 2-22 不同压力和温度下纯水的密度 (引自 Dorsey, 1940)

空气的比体积 v_{a0} 为

$$v_{a0} = \frac{V_a}{m_a} \quad (2-5)$$

空气是由若干种气体和不同含量水蒸气组成的混合物。不含水蒸气时称为干的空气, 含水蒸气时称为湿的空气。在岩土工程中通常遇到的压力和温度情况下, 干的和湿的空气均可视为“理想”气体。理想气体具有以下规律

$$\bar{u}_a V_a = \frac{m_a}{\omega_a} RT \quad (2-6)$$

式中 \bar{u}_a ——绝对气压 ($\bar{u}_a = u_a + u_{atm}$) (kN/m² 或 kPa);

u_a ——压力表气压 (kN/m² 或 kPa);

u_{atm} ——大气压力 (即 101.3kPa 或 1atm);

V_a ——空气体积 (m³);

m_a ——空气质量 (kg);

ω_a ——空气的分子质量 (kg/kmol);

R ——气体常数 [8.31432J/(mol·K)];

T ——绝对温度 ($T = t^0 + 273.16$, K);

t^0 ——温度 (°C)。

式 (2-6) 的右方 (即 $\frac{m_a}{\omega_a} RT$)，对于质量和温度不变的封闭系统内的空气来说是一个常数。在此条件下, 式 (2-6) 可用 boyle 定律表示

$$\bar{u}_{a1} V_{a1} = \bar{u}_{a2} V_{a2} \quad (2-7)$$

式中 \bar{u}_{a1} , V_{a1} ——分别为第 1 种状况下空气的绝对压力和体积;

\bar{u}_{a2} , V_{a2} ——分别为第 2 种状况下空气的绝对压力和体积。

对理想气体式 (2-6) 可改写成

$$\frac{m_a}{V_a} = \frac{\omega_a}{RT} \bar{u}_a \quad (2-8)$$

将式 (2-4) 代入式 (2-8), 得空气密度的公式

$$\rho_a = \frac{\omega_a}{RT} \bar{u}_a \quad (2-9)$$

空气的分子质量 ω_a 取决于干的空气和水蒸气混合物的组成。干的空气的分子质量为 28.966 kg/kmol, 水蒸气 H_2O 的分子质量为 18.016 kg/kmol。空气组成中的氮气 N_2 和氧气 O_2 在大气中的含量基本不变, 但二氧化碳 CO_2 的含量随环境状况 (如煤和石油燃料的消耗率) 而变化。空气组成中, 含量变化最大的是水蒸气。空气中的水蒸气含量 (体积百分比) 可低到 0.000002 %, 高至 4% ~ 5%。每个组成部分的变化都会影响空气的分子质量, 从而影响空气的密度。

水蒸气在空气中的含量通常用相对湿度来表示

$$RH = \frac{\bar{u}_v(100)}{\bar{u}_{v0}} \quad (2-10)$$

式中 RH ——相对湿度 (%);

\bar{u}_v ——空气中的水蒸气分压力 (kPa);

\bar{u}_{v0} ——同一温度下, 水蒸气的饱和压力 (kPa)。

2. 粘滞性

所有流体均对形状改变或剪切作用产生抵抗, 这种抵抗特性称为粘滞性。流体位于两块板之间, 通过滑动其中一块板施加剪力于流体, 这时候流体产生的抵抗力定义为流体的绝对 (动力) 粘滞性 μ 。绝对粘滞性的大小与压力、温度有关。不过, 在一般土木工程中通常遇到的压力范围内, 压力的影响可以忽略不计。

图 2-23 表示水、空气和其他几种物质在不同温度下的绝对粘滞性。从图中可看出, 液体的粘滞性随温度的增加而减少, 而空气的粘滞性则随温度的增加而增加。

3. 表面张力

收缩膜具有一种特性, 称为表面

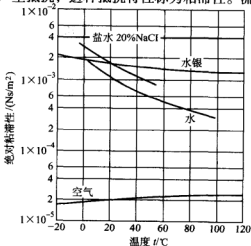


图 2-23 不同温度下流体的粘滞性
(引自 Streeter 和 Wylie, 1975)

张力。表面张力的产生是由于收缩膜内的水分子受力不平衡（图 2-24a）。水体内部的水分子承受各向等值力的作用。收缩膜内的水分子有一指向水体内部的不平衡力的作用。为保持平衡，收缩膜内必须产生张力。收缩膜承受张力的特性，称为表面张力 T_s ，以收缩的张力（N/m）大小表示，其作用方向与收缩膜表面相切，其大小随温度的增加而减小。表 2-1 列出收缩膜在不同温度下的表面张力值。

表 2-1 收缩膜的表面张力（引自 Kaye 和 Laby, 1973）

温度 $t/^\circ\text{C}$	0	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	100
表面张力 $T_s/(\text{mN/m})$	75.7	74.2	73.5	72.75	72.0	71.2	69.6	67.9	66.2	64.4	62.6	58.8

表面张力使收缩膜具有弹性薄膜的性状。这种性状同充满气体的气球的性状相似，里面的压力大于外面的压力。如在可伸缩的二维薄膜的两面施加不同的压力，则薄膜将呈现压力较大一面的凹状弯曲并在膜内产生张力，以维持平衡。根据平衡条件，可以建立曲面两侧的压力差 Δu 同表面张力大小以及薄膜曲率半径的关系（图 2-24b）。

作用于薄膜上的压力分别为 u 和 $(u + \Delta u)$ ，薄膜的曲率半径为 R_s ，表面张力为 T_s 。作用于薄膜上的水平力相互抵消。为保持垂直力平衡，要求：

$$2T_s \sin\beta = 2\Delta u R_s \sin\beta \quad (2-11)$$

式中 $2R_s \sin\beta$ ——投影在水平面上的薄膜长度。

式 (2-11) 可改写成

$$\Delta u = \frac{T_s}{R_s} \quad (2-12)$$

式 (2-12) 给出曲率半径为 R_s 、表面张力为 T_s 的二维曲面两侧的压力差。对于鞍形的翘曲表面（三维薄膜），应用拉普拉斯方程（图 2-25），可将式 (2-12) 延伸写成

$$\Delta u = T_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2-13)$$

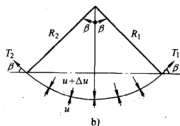
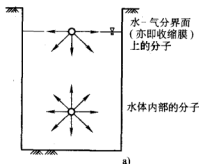


图 2-24 水—气分界面上的表面张力现象

- a) 收缩膜上和液体中的分子间作用力
b) 作用于二维曲面上的压力和表面张力

式中 R_1 和 R_2 ——翘曲薄膜在正交平面上的曲率半径。

如曲率半径各向等值 (即 $R_1 = R_2 = R_s$)，则式 (2-13) 成为

$$\Delta u = \frac{2T_s}{R_s} \quad (2-14)$$

在非饱和土中，收缩膜承受大于水压力 u_w 的空气压力 u_a 。压力差 $\Delta u = (u_a - u_w)$ 称为基质吸力，压力差使收缩膜弯曲。从式 (2-14) 可推出

$$(u_a - u_w) = \frac{2T_s}{R_s} \quad (2-15)$$

式中 $(u_a - u_w)$ ——基质吸力，为作用于收缩膜上的孔隙气压力与孔隙水压力的差值。

式 (2-15) 称为 Kelvin 毛细模型方程。随着土的吸力增大，收缩膜的曲率半径减

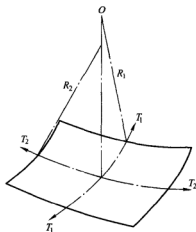


图 2-25 翘曲薄膜上的表面张力

小。弯曲的收缩膜通常称为弯液面。当孔隙气压力和孔隙水压力的差值等于零时，曲率半径 R_s 将变成无穷大。因此，吸力为零时，水—气分界面是平的。

2.2.3 空气和水的相互作用

空气和水的混合物可以是不混溶的，也可以是混溶的。自由空气和水混合而不发生相互作用的，称为不混溶的混合物。这类混合物的特征是水和空气被收缩膜隔开。混溶的混合物有两种形式：一是空气溶解于水中，可能占据水体积的 2% 左右；二是空气中存在水蒸气。上述几种混合物均将在下面几节中讨论，首先考虑水的各种可能形态。

1. 水的固态、液态和气态

水可能以下列三种形态存在：固态（冰）、液态（水）和气态（水蒸气），见图 2-26。这里提到的“水”或“液相”均指液态水。水的状态取决于压力和温度条件。

在水的状态图上（图 2-26）有三根线：气化曲线 AB 、溶化曲线 AC 和升华曲线 AD 。气化曲线 AB 亦称水的蒸气压曲线，它给出压力和温度的各种组合，在这些组合条件下，液态水和气态水能够共存而保持平衡。溶化曲线 AC 是固态水和液态水的分界线，而升华曲线 AD 是固态水和气态水的分界线。沿溶化曲线，固态水可以同液态水共存；沿升华曲线，固态水可以同气态水共存。气化曲线、溶化曲线和升华曲线相交于一点 A ，这个点称为水的三重点。在这点所代表

的压力 (0.61kPa) 和温度 (0℃) 条件下, 固态水、液态水和气态水能够共存而保持平衡。

2. 水蒸气

图 2-26 中, 气化曲线 AB 代表液态水和气态水之间的平衡条件。在此平衡状态下, 气化过程和凝结过程以相同的速率进行。凝结速率取决于蒸汽压力, 后者在气化曲线上达饱和值。另一方面, 气化速率只取决于温度。因此, 在饱和蒸汽压和温度之间存在单值关系, 如气化曲线所示。

在大气中, 水蒸气同空气是混合在一起的。然而, 空气的存在并不影响水蒸气的性状。这一现象可用 Dalton 分压力规律表达。Dalton 规律认为, 气体混合物的压力等于各个组成气体的分压力的总和, 而组成气体的分压力等于该组成气体单独充满全部体积时的压力。即气体混合物中的某一气体的性状同其他组成气体无关。因此, 大气中同水保持平衡的水蒸气的分压力也就等于饱和压力值。同理, 水体上方存在的空气并不改变水的状态平衡 (图 2-26)。

在自然条件下, 空气中的水蒸气通常同周围水体不处于平衡状态。这就是说, 空气中的水蒸气的分压力 \bar{u} , 通常不等于相应温度下的饱和蒸汽压 \bar{u}_0 。因此, 在某一温度下, 空气中的水蒸气是欠饱和、饱和还是超饱和, 取决于水蒸气的分压力 \bar{u} , 是小于、等于、还是大于饱和蒸汽压。饱和状态意味着水蒸气同水保持平衡, 蒸发和凝结以同样速率进行着。另一方面, 欠饱和和以及超饱和情况下的水蒸气是处于非平衡状态。超饱和状态意味着水蒸气太多了, 超量部分最终要凝结成水。在这种情况下, 凝结速率大于蒸发速率, 这一现象一直持续到水蒸气的分压力 \bar{u} 降至饱和蒸汽压 \bar{u}_0 为止。在欠饱和情况, 水蒸气含量相对于平衡状态不足, 因此蒸发速率将大于凝结速率, 一直到水蒸气的分压力 \bar{u} 达到饱和蒸汽压 \bar{u}_0 为止。

在自然条件下, 空气中的水蒸气通常同周围水体不处于平衡状态。这就是说, 空气中的水蒸气的分压力 \bar{u} , 通常不等于相应温度下的饱和蒸汽压 \bar{u}_0 。因此, 在某一温度下, 空气中的水蒸气是欠饱和、饱和还是超饱和, 取决于水蒸气的分压力 \bar{u} , 是小于、等于、还是大于饱和蒸汽压。饱和状态意味着水蒸气同水保持平衡, 蒸发和凝结以同样速率进行着。另一方面, 欠饱和和以及超饱和情况下的水蒸气是处于非平衡状态。超饱和状态意味着水蒸气太多了, 超量部分最终要凝结成水。在这种情况下, 凝结速率大于蒸发速率, 这一现象一直持续到水蒸气的分压力 \bar{u} 降至饱和蒸汽压 \bar{u}_0 为止。在欠饱和情况, 水蒸气含量相对于平衡状态不足, 因此蒸发速率将大于凝结速率, 一直到水蒸气的分压力 \bar{u} 达到饱和蒸汽压 \bar{u}_0 为止。

空气中的水蒸气分压力反映出空气在一定温度下为水蒸气所饱和的程度。空气中的水蒸气饱和度称为相对湿度 RH [式 (2-10)]。

3. 溶解于水中的空气

水分子排列成带有许多孔眼的格栅结构 (图 2-27), 这些孔眼成为可以容纳空气的“笼子”。空气溶解于水, 并填满这些“笼子”时, 其体积大约等于总体

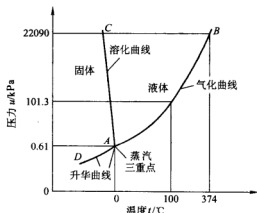


图 2-26 水的状态图

(未按比例; 引自 Van Haveren 和 Brown, 1972)

积的 2%。水的格栅结构相对稳定，其密度不因空气溶解其中而有多大变化。

图 2-28 表示不同温度下溶解空气的存在对水的密度的影响。可用上面有无摩擦活塞、下面有“透水石”的圆筒来模拟说明气—水混合物的性状（图 2-29）。“透水石”模拟水，其孔隙体积等于总体积的 2%。“透水石”上方圆筒中有自由空气。假想在自由空气与透水石的分界面上有一阀门，它能控制空气进入“透水石”。

设有一初始压力等同地施加于自由空气和“透水石”中的空气。现将假想阀门关闭。这时候，如果增大作用于活塞上的荷载，透水石上方的空气将遵循 Boyle 定律被压缩（式（2-7））。现将假想阀门打开。这时候，若干空气将遵循 Henry 定律进入透水石。Henry 定律表明，在恒温条件下，溶解于一定体积液体中的气体质量同溶液上方气体的绝对压力成正比。此过程将一直进行下去，直到自由空气全部进入透水石，而任何附加外荷均由“透水石”承担为止。

上述模型并不能完全说明非饱和土的情况。有固体土颗粒存在时，空气压力不一定等于水压力。土中的空气压力和水压力在某一过程中也可能以不同速率发生变化。在上述模型中，自由空气同水具有相同的压力。

进入水中或从水中逸出的空气的质量是随时间而变的，根据所考虑的工程问题的性质，可以考虑也可以忽略不计这个因素。水中能溶解多少气体称为可溶性，而溶解的速率称为扩散率。

4. 空气在水中的可溶性

溶解于水中的空气的体积基本上与空气压力或水压力无关。理想气体定律和 Henry 定律可以证明这点，理想气体定律（式（2-6））应用于在一定

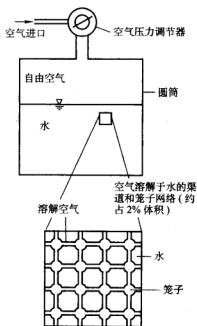


图 2-27 空气溶解于水的直观说明

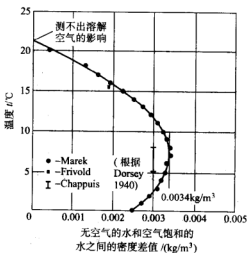


图 2-28 溶解空气对水的密度的影响
(引自 Dorsey, 1940)

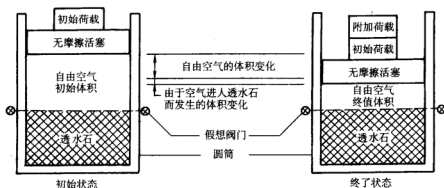


图 2-29 活塞—透水石模型

温度、压力下溶解于水中的气体时，可写成

$$V_d = \frac{m_d RT}{u_a \omega_a} \quad (2-16)$$

式中 V_d ——溶解于水中的空气的体积；

m_d ——溶解于水中的空气的质量；

\bar{u}_a ——溶解于水中的空气的绝对压力；

R ——气体常数 $[8.31432\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})]$ ；

T ——绝对温度 ($T = t^0 + 273.16, \text{K}$)；

ω_a ——空气的分子质量 (kg/kmol)。

溶解于水中的空气的绝对压力等于平衡状态下的自由空气的绝对压力，回到上述模型，增加活塞荷载，将增加自由空气的压力，从而将有更多的自由空气进入“透水石”。经过若干时间便达到平衡状态，这时候自由空气中的压力等于溶解于水中的空气的压力。如果活塞荷载再次增加，那么同一过程又将再现。

到达平衡状态时，溶解于水中的空气的质量与相应的绝对压力有关，如 Henry 定律所表述。对于温度在整个过程中保持恒定的情况，溶解于水中的空气的质量与绝对压力的比值是恒定的，即

$$\frac{m_{d1}}{\bar{u}_{a1}} = \frac{m_{d2}}{\bar{u}_{a2}} = \text{常数} \quad (2-17)$$

式中 m_{d1}, \bar{u}_{a1} ——在第 1 状态下，溶解空气的质量和绝对压力；

m_{d2}, \bar{u}_{a2} ——在第 2 状态下，溶解空气的质量和绝对压力。

利用式 (2-16)、式 (2-17) 可计算出溶解空气的体积 V_d 。在恒温情况，不同压力下溶解于水中空气的体积是常数。

5. 气体在水中的扩散

Fick 扩散定理描述气体在水中穿过的速率。在单位时间内, 通过单位面积的气体质量等于扩散系数 D 乘上气体的浓度梯度。对于空气在水中的扩散, 浓度差也就等于自由空气与溶解于水中的空气的密度差。

在常温情况下, 空气的密度是空气压力的函数(式(2-9))。自由空气中的压力增大时, 在自由空气与溶解空气之间将产生压力差。正是在该压力差的驱动下, 自由空气扩散进入水中。

组成空气的气体逐一扩散进入水中。作为这些气体的组合物, 空气溶解于水的速率大约等于 $2.0 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$ 。

Barden 和 Sides (1967) 量测了空气在饱和土和压实土的液相中的扩散系数, 结果表明, 扩散系数似乎随着土的含水量的减小而减小。空气在土中水的扩散系数似乎要比空气在自由水中的扩散系数小几个数量级。

2.3 土的化学性质

2.3.1 双电层理论

研究表明, 粘土矿物带有负电荷, 造成粘土矿物带负电荷的原因有:

1) 一个理想晶体中正负电荷是平衡的, 但在晶片的边缘, 结构可能受到破坏, 使粘土颗粒带有负电荷。

2) 硅氧四面体和八面体晶片中离子交换造成粘土颗粒带有负电荷。如镁和铁可能替换八面体晶片中的铝。

3) 在碱性溶液中, 粘土颗粒边缘周围中的羟基中氢的离解。

带有负电荷的粘土薄片在它的周围产生一个电场。在电场的影响下, 极性水分子将定向排列, 正极指向矿物表面, 定向程度随电场强度减小而减弱。与粘土薄片所带负电荷平衡的阳离子被吸附在外层。

带有负电荷的粘土片和带有正电荷的阳离子云被称为扩散双电层, 或简称双电层, 如图 2-30a 所示。两个带有负电荷的粘土薄片间吸附水的情况如图 2-30b 所示。

对于双电层方程, 这里只讨论一维问题, 并作如下假设:

1) 粘土颗粒表面是一平面, 表面上的电荷是均匀分布的。

2) 将双电层中的离子看作点电荷, 并且不考虑它们相互之间的作用。

3) 介质静介电常数与位置无关。

电场中 i 型离子的电势能 E_i 可由下式计算

$$E_i = v_i e \phi \quad (2-18)$$

式中 v_i —— i 型离子的化合价;

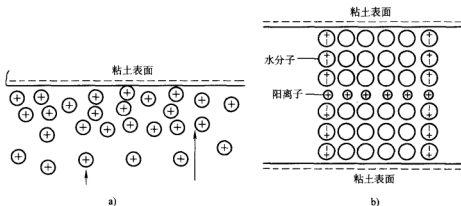


图 2-30 双电层概念和粘土薄片间吸附水情况

e ——单位电荷, $e = 4.8 \times 10^{-10}$ 静电单位或 $16 \times 10^{-20} \text{C}$;

ψ ——电位势 (V)。

点电荷电场中电位势随距点电荷表面距离增大而减小, 当距离较大时, $\psi \rightarrow 0$, 故 $E_0 = 0$, 式中下标 0 表示远离电荷表面。

根据 Boltzmann 定则, 在平衡溶液的力场中, i 型离子浓度 n_i 可用式 (2-19) 表示

$$n_i = n_0 \exp\left(\frac{E_0 - E_i}{kT}\right) \quad (2-19)$$

式中 n_0 ——远离电荷表面处的离子浓度, 离子数/ cm^3 ;

E_i , E_0 ——分别为 i 型离子的电势能和 i 型离子电场中远离电荷表面处的电势能;

k ——Boltzmann 常数;

T ——绝对温度 (K)。

结合式 (2-18) 和式 (2-19), 并注意到 $E_0 = 0$, 则 Boltzmann 定则表示如下形式

$$n_i = n_0 \exp\left(\frac{-v_i e \psi}{kT}\right) \quad (2-20)$$

式 (2-20) 将离子浓度与电位势联系起来, 如图 2-31 所示。电场中各点电位势可采用 Poisson 方程表示

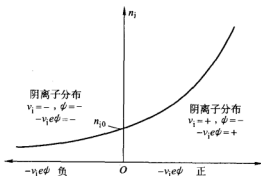


图 2-31 离子浓度与电位势关系示意图

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{D} \quad (2-21)$$

式中 x ——距离电荷表面距离；

ρ ——电荷密度；

D ——介电常数。

双电层中电荷密度可用式 (2-22) 表示

$$\rho = e \sum v_i n_i \quad (2-22)$$

将式 (2-20) 代入式 (2-22)，可得

$$\rho = e \sum v_i n_0 \exp\left(\frac{-v_i e\psi}{kT}\right) \quad (2-23)$$

将式 (2-23) 代入式 (2-21)，可得单一平面双电层的基本微分方程

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi e}{D} \sum v_i n_0 \exp\left(\frac{-v_i e\psi}{kT}\right) \quad (2-24)$$

对于溶液中具有相同化合价的单一阳离子和阴离子，即 $i=2$ ，则

$$|v_+| = |v_-| = v \quad (2-25)$$

$$n_0^+ = n^- = n_0 \quad (2-26)$$

式 (2-24) 可简化为 Poisson-Boltzmann 方程式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{8\pi n_0 v e}{D} \sinh \frac{ve\psi}{kT} \quad (2-27)$$

对单一平面的扩散双电层，式 (2-27) 可改写成下述形式

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} = \sinh y \quad (2-28)$$

式中， y 和 ζ 为量纲为 1 的量，其表达式为

$$y = \frac{ve\psi}{kT} \quad (2-29)$$

$$\zeta = Kx \quad (2-30)$$

其中

$$K^2 = \frac{8\pi n_0 e^2 v^2}{DkT} \quad (2-31)$$

令

$$z = \frac{ve\psi_0}{kT} \quad (2-32)$$

积分式 (2-28)，并代入边界条件， $\zeta=0$ ， $y=z$ ； $\zeta=\infty$ ， $y=0$ ， $\frac{dy}{d\zeta}=0$ 。可得

$$e^{\frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} + 1 + (e^{\frac{x}{2}} - 1)e^{-\zeta}}{e^{\frac{x}{2}} + 1 - (e^{\frac{x}{2}} - 1)e^{-\zeta}} \quad (2-33)$$

式(2-33)表示电位势随距电荷表面距离增加大致成指数曲线下降,如图2-32所示。

在表面电位势较小(大约小于25mV)

的情况下, $\frac{ve\psi}{kT} = 1.0$, 式(2-33)可以近似地按式(2-34)计算

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = k^2\psi \quad (2-34)$$

式中

$$\psi = \psi_0 e^{-kx} \quad (2-35)$$

式(2-35)表示电位势随距离完全按指数曲线下降。在这种情况下,扩散电荷的重心位

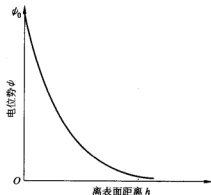


图2-32 电位势与距电荷表面距离关系图

于距表面的距离 $x = \frac{1}{K}$ 处。因此, $\frac{1}{K}$ 可以看作双电层的“厚度”。 $\frac{1}{K}$ 的表达式为

$$\frac{1}{K} = \left(\frac{kTD}{8\pi n_0 e^2 v^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-36)$$

式(2-36)表明双电层厚度与电解质浓度 n_0 、阳离子化合价 v 、介质介电常数 D 、温度 T 、电荷密度有关。

双电层的电荷 σ 可由式(2-37)计算

$$\sigma = - \int_0^{\infty} \rho dx \quad (2-37)$$

将 Poisson 方程式(2-21)代入式(2-37), 得

$$\sigma = \frac{D}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx = - \frac{D}{4\pi} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{x=0} \quad (2-38)$$

式(2-38)表示表面电荷决定于电位势函数的起始斜率 $\left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{x=0}$, 而起始斜率可由式(2-28)求得, 于是可得到

$$\sigma = \left(\frac{2n_0 kTD}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sinh \frac{z}{2} \quad (2-39)$$

在一般小的表面电位势情况下, 式(2-39)可简化为

$$\sigma = \left(\frac{kD}{4\pi} \right) \psi_0 \quad (2-40)$$

综上所述,式(2-20)表示离子浓度与电位势的关系,式(2-33)和(2-35)表示电位势随距离的变化关系,式(2-39)和(2-40)表示电荷与电位势的关系。因此通过上述关系可以完整地描述双电层性质。

将双电层理论应用于粘土性状的分析,尚有许多不足之处,也有反对意见。如:没有考虑吸附在粘土和吸附在阴离子(水化了的水)的水分子能量等。将双电层理论作为一个概念是有用的,它可让我们概括出影响粘土颗粒间各种力的各种因素,但不能依靠它提供有关土的各种特性的精确定量结果。

2.3.2 颗粒间作用力

1. 粘土颗粒间的排斥力

根据双电层理论可以计算两粘土薄片之间的斥力。在两片之间的任一点上,电场作用于电荷的力为 $\rho \frac{d\psi}{dx}$ 。由于电荷密度 ρ 和电位势 ψ 都是 x 的函数,因此该力也是 x 的函数。为了维持平衡状态,必须存在随 x 而变化的水压力 p , 并满足式(2-41)

$$\frac{dp}{dx} + \rho \frac{d\psi}{dx} = 0 \quad (2-41)$$

结合式(2-21)和式(2-41)可得

$$\frac{dp}{dx} - \frac{D}{4\pi} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \frac{d\psi}{dx} \right) = 0 \quad (2-42)$$

由式(2-42)积分可得

$$p - \frac{D}{8\pi} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = A \quad (2-43)$$

式中 A ——积分常数。

在两薄片之间的中点处(图2-33), $x = d$, $\frac{d\psi}{dx} = 0$, 代入式(2-43), 可得

$$A = p_d \quad (2-44)$$

式中 p_d ——两薄片之间中点($x = d$)处排斥力。

于是,式(2-43)可改写成

$$p - \frac{D}{8\pi} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 - p_d = 0 \quad (2-45)$$

设 p_∞ 为溶液中无限远处静水压力, 则 p_d 与 p_∞ 之差即为使两薄片分开所需的净压力。这一压力有把两薄片推开得更远的趋势, 即

$$p_d - p_\infty = \int_{\psi=0}^{\psi=\psi_d} dp = - \int_0^{\psi_d} \rho d\psi = 2n_0 kT \left(\cosh \frac{ze\psi_d}{kT} - 1 \right) \quad (2-46)$$

式中 ϕ_d —— $x=d$ 处的电位势；

h ——分子间的距离。

式 (2-46) 计算结果如图 2-33 所示，图 2-33 中给出 $n_i = 10^{-3}$ 时，排斥力 $p_d - p_\infty$ 与两薄片距离 d 的关系。

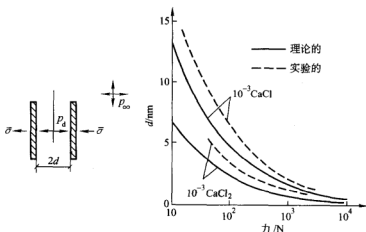


图 2-33 两粘土薄片中间的排斥力

2. 粘土颗粒间的吸引力

粘土颗粒间的吸引力主要是由范德华力引起的。Casimir 和 Polder (1948) 把成对分子间的吸引能 V_A 推广到平行平面间吸引力相互作用上，从而获得式 (2-47)

$$V_A = \frac{A}{48\pi} \left[\frac{1}{d^2} + \frac{1}{(d + \delta)^2} - \frac{2}{\left(d + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right] \quad (2-47)$$

式中 d ——两粘土薄片间距的一半；

δ ——粘土薄片厚度；

A ——范德华常数， $10^{-18} \sim 10^{-21} \text{J}$ 。

式 (2-47) 得到广泛应用。然而 Lifshitz (1948) 和 Derjaguin (1960) 研究表明，范德华力是电磁力。据此认为 Casimir-Polder 理论无效，但对于间距小于 1000\AA 的分离颗粒是一种较好的近似理论。Lifshitz 理论也认为颗粒间引力取决于距离。根据 Casimir-Polder 理论，有

$$F \propto \frac{AK}{d^3} \quad (2-48)$$

根据 Lifshitz 理论，有

$$F \propto \frac{BK'}{d^4} \quad (2-49)$$

式中 A 、 B 、 K 和 K' ——均为常数；

d ——两粘土薄片间距的一半。

上面介绍了两粘土颗粒间作用力：双电层排斥力和范德华电磁吸引力。排斥力和吸引力是同时并存的，两者叠加情况如图 2-34 所示。根据双电层理论，电解质浓度、阳离子化合价、介电常数和 pH 值对排斥力的影响很敏感，但吸引力又受介电常数和温度的影响。在斥力和引力叠加得到的曲线上，若合力是斥力则悬液中颗粒受阻不能紧密接近，悬液呈稳定状态。若合力是吸引力，则颗粒间互相靠近而产生絮凝，从悬浮液中沉淀下来。

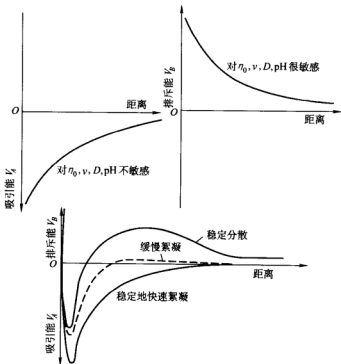
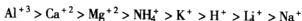


图 2-34 排斥力、吸引力及两力合成情况

2.3.3 离子交换

粘土颗粒常带有负电荷，并且在外层吸附有与负电荷平衡的带正电荷的阳离子云。被粘土颗粒吸附的各种阳离子，对粘土的亲合性是不同的。对大多数粘土来说，其顺序为：



上面的顺序也不是惟一的，它可能随粘土矿物成分、所包含的阳离子及其他条件

而有所变化。

离子交换主要是指粘粒表面扩散层外水溶液中的离子被同扩散层内其他同符号离子置换的现象。离子交换能力的大小用离子交换能量来表示,通常以每克粘土的毫克当量来计算。土的离子交换能量越大,它就越容易在人为地改变溶液介质离子成分的情况下改变其工程性质。

离子交换能力同矿物成分、土粒大小、交换离子的成分及浓度、溶液的 pH 值等有关。矿物亲水性越强、土粒越小,其交换能量也越大。表 2-2 列出了几种典型的矿物离子交换能量代表值。

表 2-2 离子交换能量值

矿物类型	高岭石	伊利石	蒙脱石	腐植质
离子交换能量/(mg·eq/100g)	3~15	10~40	80~150	200~400

离子交换原理广泛应用于地基的改良和加固。用高价阳离子交换粘性土中的低价阳离子,使扩散层变薄,因而粘粒靠拢、紧密,使地基强度提高,压缩性降低。

2.4 土水气相互作用

2.4.1 土水体系中的势能概念

分布于土骨架孔隙中的水,含有多种可溶解物质,且与土粒表面有物理和化学的相互作用,其性质和自由水体有显著区别。一般按其物理化学性质,分为结合水、毛细水和重力水等几类,它对土中水的静态平衡和转移提供不同的机制。

用势能概念可以很方便地表示土的持水能力和水分转移机制。各种势能的总和为零时,土中水达到静态平衡;当总势能不为零时,就产生水的流动,并总是从高势能处流向低势能处,也就是从低吸力处流向高吸力处。

土中水总的势能为各种势能分量之和,可以表达如下

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_g + \Delta\Phi_m + \Delta\Phi_p + \Delta\Phi_o + \Delta\Phi_e + \cdots \quad (2-50)$$

式中 $\Delta\Phi_g$ ——重力势;

$\Delta\Phi_m$ ——广义毛管(基质)势;

$\Delta\Phi_p$ ——压力势;

$\Delta\Phi_o$ ——盐渗析(溶质)势;

$\Delta\Phi_e$ ——电渗势;

⋮

势能的常用单位是焦耳,即 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。各专业对势能的表示方法有所不同,如果表示为单位体积水的能量,则单位为 kPa ;如果表示为单位重量水的能量,则

单位为 m_0 。

重力势表示土中水的位能，取决于所研究点和基准面的相对位置。单位体积水的重力势可表示为

$$\Delta\Phi_g = z\gamma_w \quad (2-51)$$

式中 z ——所考虑点相对于某基准面的竖向距离，在基准面以上取正值，之下取负值；

γ_w ——水的容重。

广义毛管势又称为基质势，主要是由气—水界面的收缩膜，即表面张力引起的。在地下水位以上恒为负值，处于静平衡状态时，与重力势大小相等，符号相反。在地下水位以下为零。将非饱和土的孔隙视为毛管，则可得到如式 (2-13) ~ 式 (2-15) 相同的公式，即有毛管张力 p_c 为

$$p_c\Delta\Phi_m = (U_a - U_w) = \frac{2T_s}{R_s} \quad (2-52)$$

相应的毛管升高为：

$$h_c = \frac{2T_s}{\gamma_w R_s} \quad (2-53)$$

式中 γ_w ——水的重度。该公式可用于计算因毛管现象而形成的土的吸力。

对于细粒土，由于吸力而引起的负孔隙水压力可以达到很大的数值。例如，对于 $<5\mu m$ 的颗粒占一定数量的粘土，其孔隙直径的量级可取 $0.2\mu m$ ，即 $r = 0.1\mu m$ ，室温时水的表面张力为 $0.075g/cm$ ，则 $p_c = 15kg/cm^2$ ，由此可以看出毛管压力的量级。

对粘土颗粒而言，双电层范围内的阳离子浓度大于自由水中的离子浓度，因而水有向双电层中转移的趋向。在一定密度的土中，颗粒距离较近，彼此的双电层受到压缩而交错在一起，这种因渗析作用而使水吸入颗粒间的双电层中的力，使颗粒彼此排斥，引起土的膨胀，直到重新平衡，吸力消失时为止。这种因颗粒表面与水的物理化学作用而产生的引力和斥力，也是土中吸力的来源之一。对自由膨胀的粘土薄片，其势能分量为

$$\Delta\Phi'_m = R_y T \cosh(\gamma_c - 1) \quad (2-54)$$

式中 R_y ——气体常数；

T ——绝对温度；

γ_c ——两粘土薄片间中点的电势。其他复杂情况现在还无法计算。

由于这种引力和斥力与毛管压力共同组成广义毛管势分量，而在实验量测中，两者又无法分开，故在实用上只视为一个分量。

压力势是由与基准面上压力不同的外压力所引起的水的能量差而形成的。在

地下水位以下，它相当于测压管压力。

渗析势是土中两点因土中水的盐浓度不同而引起的孔隙水势能差。电渗势是土中两点因电位不同而引起的孔隙水势能差。除特殊情况外，在一般土中水运动的研究中是忽略不计的。

各种势能的组合使总势能不为零时，就产生土中水的渗流运动，即土中渗透规律的研究对象。实际上，在土中水的渗流运动中，各种势能是组合存在的，最常见的主要组合有：

地下水位以上

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_g + \Delta\Phi_m \quad (2-55)$$

式中 $\Delta\Phi_g$ ——重力势；

$\Delta\Phi_m$ ——广义毛管势。

地下水位以下

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_g + \Delta\Phi_p \quad (2-56)$$

式中 $\Delta\Phi_g$ ——重力势；

$\Delta\Phi_p$ ——压力势。

此外，土中水还可以蒸汽形式转移。一种是以扩散形式，从蒸汽压力高处向低处转移；另一种是和空气一起，由总气压力高处向低处转移。这些都取决于温度差，因而这种形式下水分是由高温处向低温处转移的。在渗流运动中一般也不讨论这种形式的水分转移。

2.4.2 非饱和土的水气形态

如果不考虑收缩膜，非饱和土被认为由固体骨架、孔隙水和气三相所组成，土体中存在着大小和形状多变的孔道体系，按照孔隙中水相和气相的存在形态，可将非饱和土分为水封闭、双开敞和气封闭三种基本形态，如图 2-35 所示。当饱和度小于 a 时，孔隙中的气体是连通的，而孔隙中的水只能依靠气—水界面的弯液面的表面张力而被吸持在小孔隙的某些“狭颈”孔道，或在固相颗粒周围形成孤立的水环或角点。由于孔隙中的水彼此是互不连通的，为气相所包围，故称为水封闭、气开敞系统；当饱和度介于 a 与 b 之间时，孔隙水和气都是连通的，故称为双开敞系统；而当饱和度增加到 b 以上时，液相不仅占据了全部小孔道，而且也占据了大孔道，气相被液体分割包围，形成孤立气泡悬浮于液体中，气相完全被封闭，与大气不能连通，固液气三相的界面现象消失，这时，非饱和土与饱和土的性状差别主要在于前者孔隙中的液体是可压缩的，而后者孔隙中的液体不可压缩，故称之为气封闭、水开敞系统。

“双开敞”的形态是一个很不稳定的阶段，当水分从“气相完全连通形态”

增大时,土体中的部分不连续水相可以逐步地接续起来,并与外界相通。但这种情况只是部分发生,其余部分仍保留着气相与外界(大气)连通的状况。在这一阶段,土体受压后的变形将是相当迅速的。这阶段可称之为“气相的部分连通形态”;当土中的水分继续增多时,不连续水的接续现象会继续发展和蔓延,由于毛细水的迁移,在土体的表面首先将会形成连续的水膜,从而把气相与大气暂时隔离开来。这时,气相仅在土体内部存在连通现象,可称为“气相的内部连通形态”。研究表明,非饱和土处于“内部连通”与处于“部分连通”时的性状有显著的不同。

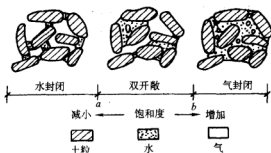


图 2-35 非饱和土的水气形态

在水封闭形态的低含水量土中,液相之间并无水力联系,只有孔隙气体的流动,而水只能以蒸汽形式随气体流动而转移,这在土力学中不是主要的研究对象。而有实际意义的是双开敞和气封闭这两种形态,前者可视为互不混合的两种流体的运动,而后者则作为一种携气水流的运动,两者都有其各自的规律性。土中水气形态将直接影响非饱和土的渗流特性,从而也影响变形固结与强度特性。

在水封闭形态的低含水量土中,液相之间并无水力联系,只有孔隙气体的流动,而水只能以蒸汽形式随气体流动而转移,这在土力学中不是主要的研究对象。而有实际意义的是双开敞和气封闭这两种形态,前者可视为互不混合的两种流体的运动,而后者则作为一种携气水流的运动,两者都有其各自的规律性。土中水气形态将直接影响非饱和土的渗流特性,从而也影响变形固结与强度特性。

参 考 文 献

- 1 龚晓南. 高等土力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1996
- 2 四校合编. 地基及基础. 第3版. 北京: 中国建筑工业出版社, 1998
- 3 D G 弗雷德隆德, H 拉哈尔佐. 非饱和土土力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997
- 4 黄文熙. 土的工程性质. 北京: 水利水电出版社, 1983
- 5 李广信. 高等土力学. 北京: 清华大学出版社, 2004
- 6 龚晓南. 土力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002
- 7 刘成宇. 土力学. 第2版. 北京: 中国铁道出版社, 2000
- 8 张学言. 岩土塑性力学. 北京: 人民交通出版社, 1993
- 9 龚晓南, 叶黔元, 徐日庆. 工程材料本构方程. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995
- 10 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学. 北京: 清华大学出版社, 1994
- 11 钱玉林, 洪家宝, 杨鼎久等. 土力学与基础工程. 北京: 中国水利水电出版社, 2002
- 12 周汉荣, 赵明华. 土力学地基与基础. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997
- 13 包承纲. 非饱和土的性状及膨胀土边坡稳定问题. 岩土工程学报, 2004, 26 (1): 1~15

第3章 土的固结与流变理论

3.1 概述

土体在荷载作用下,孔隙水缓慢渗出,体积逐渐压缩,土体中有效应力逐步增大,超静孔隙水压力逐步消散直至完全消失,这一过程称为“固结”。土体的固结取决于土体排水的快慢,它是时间的函数。随着土体的固结,土体的压缩变形和强度逐渐增长。工程中常常应用固结过程的特性,通过排水固结法对软粘土地基进行改良,来达到提高地基承载力,减小完工后沉降的目的。土的固结是土力学学科中最主要的课题之一。

土的固结过程相当复杂。它不仅取决于土的种类和性状,还取决于土的边界条件、排水条件和受荷方式等因素:二相土和三相土的固结过程迥然不同,后者由于土中含气、变形指标不易准确测定,状态方程的建立与求解都比较复杂;天然土体一般都是各向异性、非均质成层的,如何合理考虑它们对固结的影响,尚待进一步研究。就地基而言,建筑物施加的通常是局部荷载,在固结过程中,除上、下方向的压缩外,同时有不同程度的侧向排水与膨胀,这一类二相与三相固结问题,迄今还没有得到普遍的解析解。考虑到荷载随时间改变的情况,使固结微分方程的数学处理更加复杂。

对固结过程的数学描述首先归功于 Terzaghi (1924),他在一系列假定的基础上,建立了著名的一维(单向)固结理论。几十年过去了,虽然已提出许多新的固结理论,但由于 Terzaghi 固结理论简明、实用,至今仍是工程中应用最多的。Rendulic (1935)将 Terzaghi 一维固结理论推广到二维、三维情况,提出了 Terzaghi-Rendulic 固结理论。Biot (1940)基于连续体力学的基本方程,考虑了土体固结过程中孔隙水压力消散和土骨架变形之间的耦合作用,建立了较为合理完整的三维固结理论。但其直接计算较困难,至今仍只得个别情况的解析解,多数情况需要使用数值解法。

Terzaghi 固结理论、Terzaghi - Rendulic 固结理论和 Biot 固结理论都是研究饱和土体固结问题,并假定土中水的渗流服从 Darcy 定律,土体变形是小变形,而且是弹性变形。然而,实际情况要复杂的多,像吹填土等的固结变形往往很大,还有非饱和土,若用 Terzaghi 和 Biot 小变形固结理论进行分析,结果偏差较大,因此人们又发展了考虑土体的大变形、非 Darcy 渗流以及非饱和土体的固结理论。

饱和软粘土地基在动力荷载（如地震荷载、交通荷载、风荷载、波浪荷载）作用下的力学性状是土工问题的又一项重要内容，利用动力固结（俗称强夯）加固软土地基技术已广泛应用，因此讨论动、静荷载耦合作用下的渗透固结理论，为动力加固提供了新的理论依据。

土的应力应变受时间的影响是很明显的，不仅是粘性土，即使是无粘性土，其变形都不是瞬时产生的，而是以某种速度增长的。土工建筑物的变形和稳定均是时间的函数，因此在土体固结中，考虑土的流变性质是十分必要的。为研究方便起见，通常把虎克弹性体和牛顿液体作为两种理想体，并进行适当地组合，以近似地表达介质的流变特性。这种力学模型，可以把复杂的变形性质直观地表现出来。

土的固结与流变理论发展至今，内容已相当广泛，但许多问题仍然需要深入探索，在本章中难以全面介绍，因此只选择与生产实际较为接近的研究成果进行阐述。

3.2 Terzaghi 固结理论

天然土体一般是由矿物颗粒构成骨架体，再由孔隙水和气充填骨架体孔隙而组成的三相体。土颗粒压缩性很小，一般都认为其不可压缩，因此土体的变形是孔隙流体的流失及气体体积的减小，颗粒重新排列，粒间距离缩短，骨架体发生错动的结果。对于饱和两相土，孔隙水压缩量很小，孔隙水体积变化主要因为孔隙水的渗出。由于孔隙体积变化和颗粒重新排列需要一个时间过程，土体固结变形与时间有关。土体所受荷载（总压力）作用瞬时，主要由孔隙流体承担，随后，由于孔隙流体逐渐渗出，孔隙压力逐渐消散，有效应力逐渐增加。在整个过程中，总应力 σ 、有效应力 σ' 和超孔隙水压力 u 之间服从下述关系：

$$\sigma = \sigma' + u \quad (3-1)$$

3.2.1 一维固结理论

一维固结又称单向固结，是指土体在荷载作用下水气的流动和土体的变形仅发生在一个方向的土体固结问题。严格的一维固结问题只发生在室内有侧限的固结试验中，实际工程中并不存在。然而，当土层厚度较均匀，其压缩土层厚度相对于均布外荷载作用面尺度又较小时，可近似为一维固结问题。

1. 一维固结方程的解

1924年，Terzaghi 基于下述假设：土体是饱和、均质的；土中固相（土颗粒）和液相（孔隙水）在固结过程中体积不可压缩，且液相（土中水）的渗流服从 Darcy 定律；土体中渗流系数 k 和压缩系数 a_v 是常数；外荷荷载是一次瞬时施加

的；土体固结变形是小变形；土中渗流和土体变形只发生在一个方向，建立了一维固结方程

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-2)$$

式中 C_v ——固结系数 (m^2/s)，其表达式为

$$C_v = \frac{k(1+e_0)}{\gamma_w a_v} = \frac{k}{\gamma_w m_v} \quad (3-3)$$

其中 m_v ——体积压缩系数， $m_v = \frac{a_v}{1+e_0}$ 。

式 (3-2) 与热传导方程具有相同形式。根据给定的边界条件和初始条件，可以求解式 (3-2)，得到超静孔隙压力随时间沿深度的变化。图 3-1 所示的一维固结问题的初始条件和边界条件分别为

$$\begin{aligned} z=0, \quad u=0 \quad (t>0) \\ z=2H, \quad u=0 \quad (t>0) \\ t=0, \quad u=p \quad (0<z<2H) \end{aligned} \quad (3-4)$$

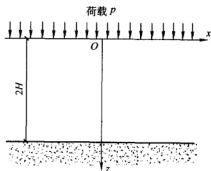


图 3-1 双向固结问题

用分离变量法，解式 (3-2)，得

$$u(z, t) = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 T_v) \quad (3-5)$$

式中 M ——积分后常数， $M = \frac{2m-1}{2}\pi$ ， $m=1, 2, \dots$ ；

$$T_v \text{——时间因子，} T_v = \frac{C_v}{H^2} t。$$

若压缩层内 p 均匀分布，由式 (3-5) 得：整个压缩层 t 时刻平均静孔隙水压力 \bar{u} 及总压缩量 S 分别为

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2H} \int_0^{2H} u dz = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \quad (3-6)$$

$$S(t) = m_v \int_0^{2H} (p - u) dz = 2m_v p H \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \right) \quad (3-7)$$

2. 固结度

在荷载作用下经过时间 t 土体固结完成的程度，称为固结度，通常用 U 表示。 z 深度处土的固结度 U_z 表示该处超静水压力的消散程度，即

$$U = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\sigma - u}{\sigma} = 1 - \frac{u}{\sigma} \quad (3-8)$$

式中 σ ——在一定荷载作用下, 土体中某点总应力;

σ' ——土体中某点有效应力;

u ——土体中某点超静孔隙水压力。

将式 (3-5) 代入式 (3-8), 可得

$$U_z = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-M^2 T_v} \quad (3-9)$$

对于工程更有实用意义的是整个土层的平均固结度 U 。地基土层在荷载作用下, 经过时间 t 所产生的固结变形量 S_{ct} 与该土层固结完成时最终固结变形量 S_c 之比, 称为地基土层平均固结度, 也称地基固结度, 即

$$U = \frac{S_{ct}}{S_c} \quad (3-10)$$

平均固结度也可用下述表达式表示

$$U = 1 - \frac{\int_0^H u(z, t) dz}{\int_0^H \sigma(z) dz} \quad (3-11)$$

式中 H ——土层单向最大排水距离。

式 (3-11) 中的分母和分子分别为土体中附加应力分布图的面积和超静孔隙水压力分布图的面积。设图 3-1 中, 某一时刻 t 时超静孔隙水压力分布图和附加应力分布图如图 3-2 所示。

从解析解式 (3-9) 出发, 土体的固结是永远不会完结的。然而, 当 $T_v = 3.0$ 时, 固结度可超过 99%, $T_v = 1.0$ 时固结约完成 93%, 对具体过程而言, $T_v = 1.0$ 时常常认为固结已完成。

当固结度 $U > 30\%$ 时, 固结度 U 与时间因子 T_v 的关系可用式 (3-12) 近似表示

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} T_v\right) \quad (3-12)$$

对不同条件下地基固结度, 曾国熙 (1975) 建议采用下述固结度普遍表达式表示

$$U = 1 - \alpha \exp(-\beta T_v) \quad (3-13)$$

对双面排水条件, 式 (3-13) 中

$$\alpha = \frac{8}{\pi^2} \quad (3-14a)$$

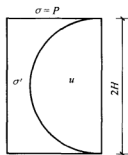


图 3-2 超静孔隙水压力
和有效应力分布图
(双面排水)

$$\beta = \frac{\pi^2 C_v}{4H^2} \quad (3-14b)$$

进一步分析表明：当 $U < 60\%$ 时， U 与 $\sqrt{T_v}$ 近似成线性关系，可用下式近似表示

$$U \approx 1.128 \sqrt{T_v} \quad (3-15)$$

当 $U > 60\%$ 时，又可用下式近似表示两者之间的关系

$$U = 1 - 10^{-\left(\frac{T_v + 0.0581}{0.933}\right)} \quad (3-16)$$

3. 荷载随时间变化时固结度计算

Terzaghi (1924) 固结理论假设荷载是一次瞬时施加的，实际工程中往往是逐步加荷的。在实际工程计算中，将逐步加荷的过程简化为在加荷起迄时间中点一次瞬时施加。然后用 Terzaghi 固结理论计算其固结度。最简单的加载过程如图 3-3 所示。其固结度计算如下：

当 $t < t_1$ 时，匀速加载； $t > t_1$ 时，保持恒载 p

$$U_t = U_{\frac{1}{2}} \frac{p'}{p} \quad (0 < t < t_1) \quad (3-17)$$

$$U_t = U_{t-\frac{1}{2}} \quad (t \geq t_1) \quad (3-18)$$

式中 U_t ——对总荷载 p 而言， t 时刻的固结度；

p' —— t 时刻 ($t < t_1$) 的荷载；

$U_{\frac{1}{2}}$ ——对瞬时荷载而言，加载时间为 $\frac{t}{2}$ ($t < t_1$) 的固结度；

$U_{t-\frac{1}{2}}$ ——对瞬时荷载而言，加载时间为 $t - \frac{t_1}{2}$ 的固结度。

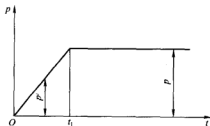


图 3-3 线性加载过程

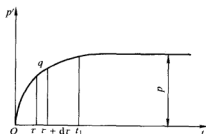


图 3-4 变速加载过程

如荷载是任意变速施加的，如图 3-4 所示。当 $t < t_1$ 时，如任意时刻 τ 加载速率为 \dot{q}_τ ，当 $t > t_1$ 时荷载不再增加，此时荷载为 p 。对这种情况，高木俊介 (1955) 建议采用下式计算固结度

$$U_t = \frac{1}{p} \int_0^t U_{(t-\tau)} \dot{q}_\tau d\tau \quad (t \leq t_1) \quad (3-19)$$

$$U_t = \frac{1}{p} \int_0^{t_1} U_{(t-\tau)} \dot{q}_\tau d\tau \quad (t > t_1) \quad (3-20)$$

式中 $U_{(t-\tau)}$ ——荷载增量 $\dot{q}_\tau d\tau$ 瞬时施加固结时间为 $(t - \tau)$ 的固结度。

如多级加荷, 可采用叠加法计算

$$U_t = U_{t_1} \frac{p_1}{\sum p} + U_{t_2} \frac{p_2}{\sum p} + \cdots + U_{t_n} \frac{p_n}{\sum p} \quad (3-21)$$

式中 U_{t_i} —— t 时刻对荷载 $\sum p$ 而言的固结度;

$\sum p$ ——各级荷载之和;

U_{t_n} —— t 时刻对荷载 p_n 而言的固结度。

图 3-5 所示的两级等速加荷为例, 下面给出各阶段固结度的表达式。

当 $0 < t \leq T_1$ 时, 对 Δp 而言的固结度

$$U_t = \frac{1}{t} \left[t - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \right] \quad (3-22)$$

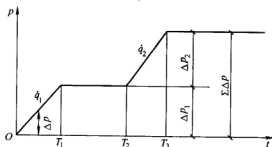


图 3-5 两级等速加荷

对 Δp_1 而言的固结度

$$U_t = \frac{1}{T_1} \left[t - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \right] \quad (3-23)$$

对 $\Sigma \Delta p$ 而言

$$U_t = \frac{\Delta p_1}{\Sigma \Delta p} \frac{1}{T_1} \left[t - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \right] \quad (3-24)$$

当 $T_1 < t \leq T_2$, 对 Δp_1 的固结度

$$U_t = 1 + \frac{\alpha}{T_1 \beta} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t-T_1)}] \quad (3-25)$$

对 $\Sigma \Delta p$ 的固结度

$$U_1 = \frac{\Delta p_1}{\Sigma \Delta p} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{T_1 \beta} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t-T_1)}] \right\} = \frac{\dot{q}_1}{\Sigma \Delta p} \left\{ T_1 + \frac{\alpha}{\beta} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t-T_1)}] \right\} \quad (3-26)$$

当 $T_2 < t \leq T_3$ 时, 对 $\Sigma \Delta p$ 的固结度

$$U_1 = \frac{\dot{q}_1}{\Sigma \Delta p} \left\{ T_1 + \frac{\alpha}{\beta} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t-T_1)}] \right\} + \frac{\dot{q}_2}{\Sigma \Delta p} \left\{ (t - T_2) - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-T_2)}) \right\} \quad (3-27)$$

当 $t > T_3$ 时, 对 $\Sigma \Delta p$ 的固结度

$$U_1 = \frac{\dot{q}_1}{\Sigma \Delta p} \left\{ T_1 + \frac{\alpha}{\beta} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t-T_1)}] \right\} + \frac{\dot{q}_2}{\Sigma \Delta p} \left\{ (T_3 - T_2) + \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta(t-T_2)} - e^{-\beta(t-T_3)}) \right\} \quad (3-28)$$

依此类推, n 级荷载时对 $\Sigma \Delta p$ 的固结度

$$U_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{q}_n}{\Sigma \Delta p} \left\{ (T_n - T_{n-1}) - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} [e^{\beta T_n} - e^{\beta T_{n-1}}] \right\} \quad (3-29)$$

式中 U_1 —— t 时刻 n 级等速加载修正后的地基平均固结度;

\dot{q}_n ——第 n 级荷载加载的速率;

$\Sigma \Delta p$ ——各级荷载总和;

T_{n-1} 、 T_n ——第 n 级荷载的起止时间;

α 、 β ——计算参数, 对不同排水条件, 其表达式不同。

4. 土的固结系数的测定

土的固结系数愈大, 土体固结愈快。正确测定固结系数对估计固结速率有重要意义。固结系数表达式为

$$C_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} = \frac{k(1 + e_0)}{\gamma_w a_v} \quad (3-30)$$

式中 k ——渗透系数 (m/s);

m_v ——体积压缩系数 (kPa^{-1});

γ_w ——水的重度 (kN/m^3);

a_v ——竖向压缩系数 (kPa^{-1});

e_0 ——土体初始孔隙比。

由于式 (3-30) 中参数指标不易选用, 计算固结系数 C_v 难以得到满意结果, 固结系数常用试验方法测定。近年来, 对如何测定固结系数研究较多, 提出许多测定固结系数的方法。这些方法大致可以分为两类, 一类是根据常规压缩试验测定, 另一类是根据各种连续加荷压缩试验测定。前一类的有时间平方根拟合法、三点法和反弯点法, 后一类有等应变率固结试验法、等梯度固结试验法、等应力

速率固结试验法和连续加荷固结试验法等。下面就时间对数拟合法和等应变率固结试验测定法作一介绍。

(1) 时间对数拟合法 时间对数拟合法是根据土的常规压缩试验某级压力下的垂直变形与时间对数的关系曲线确定土的固结系数的方法。

在某级压力下, 常规压缩试验测微表读数 d 与时间 t 的对数之间的关系 $d-\lg t$ 曲线如图 3-6 所示, 试验曲线前面部分近似呈抛物线形态, 中间一段和后面一段呈直线段, 两直线段间有一过渡曲线。通常认为两直线段交点所对应的时间代表 $U=100\%$ 时的时间 t_{100} , 对应测微表读数为 d_{100} 。试验曲线的初始读数 d_i 与理论曲线的开始点 d_0 不完全吻合。通常需要根据 $d-\lg t$ 曲线的抛物线来推求正确的初始读数 d_0 。在 $d-\lg t$ 的抛物线段内, 任取一时间 t_1 , 对应的测微表读数为 $d_{01}=2d_2-d_1$ 。依同样方法可得到初始读数 d_{02}, d_{03} 等等, 然后取平均值得到 d_0 值。

当固结度 $U=50\%$, 对应的时间为 t_{50} , 测微表读数为 d_{50} , 取 $d_{50} = \frac{1}{2} (d_0 + d_{100})$, 此时已知时间因子 $T_v = 0.197$, 则可按式 (3-31) 计算土的固结系数 C_v , 即

$$C_v = \frac{0.197 H^2}{t_{50}} \quad (3-31)$$

式中 H ——土中孔隙水的最大渗径, m。

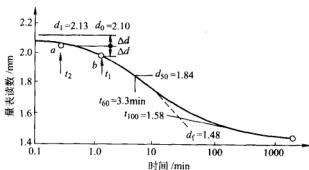


图 3-6 时间对数拟合法

由 d_0 值和 d_{100} 值求 d_{50} 值, 取 $d_{50} = \frac{1}{2} (d_0 + d_{100})$, 再由试验曲线上根据 d_{50} 值得 t_{50} 值代入式 (3-31) 即可得到 C_v 值。

(2) 等应变率固结试验测定法 控制单位时间内的变形量为常数的一维压缩试验称为等应变率固结试验。通常试样一侧为排水条件, 另一侧为不排水条件

(图 3-7), 根据试验的应变速率和不排水面测得的超静孔隙水压力值计算土的固结系数。

等应变速率固结试验的边界条件

为:

当 $z=0$ 时, $u=0$;

当 $z=H$ 时, $u=u_b$ 。

其中 H ——试样的高度;

u_b ——不排水面测得的超静孔隙水压力。

应变速率等于常数, 即

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = -r = \text{常数} \quad (3-32)$$

式中 r ——土体平均的孔隙比值随时间变化率;

\bar{e} ——土体平均孔隙比, 可记为

$$\bar{e} = \frac{1}{H} \cdot \int_0^H e dz \quad (3-33)$$

并取孔隙比随 z 线性变化, 可得

$$e = e_0 - r \left[1 - \frac{b}{r} \left(\frac{z - 0.5H}{H} \right) \right] \quad (3-34)$$

如果 $\frac{b}{r} = 2$, 由式 (3-34) 可得到试样底部的孔隙比在试验过程中保持常数。

如果 $\frac{b}{r} = 0$, 由式 (3-34) 可得到试样孔隙比沿深度方向是不变的。因此, $\frac{b}{r}$ 一定处在 0~2 之间。

根据一维固结方程, 考虑上述边界条件和应变速率等于常数的条件, 可得到试样中超静孔隙水压力表达式,

$$u = \frac{\gamma_w r}{k(1+\bar{e})} \left[\left(H z - \frac{z^2}{2} \right) - \frac{b}{r} \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{6H} \right) \right] \quad (3-35)$$

式中 k ——土的渗透系数;

γ_w ——水的重度。

将 $z=H$ 代入式 (3-35), 可得 u_b 的表达式

$$u_b = \frac{\gamma_w r H^2}{k(1+\bar{e})} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{12r} \right) \quad (3-36)$$

根据 Terzaghi 对固结系数的定义, 用 \bar{e} 代替 e , 由上时刻的固结系数 C_v 表达

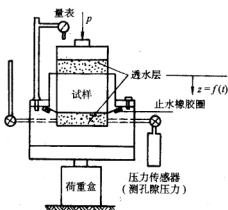


图 3-7 等应变速率固结试验仪器装置示意图

式如下

$$C_v = \frac{rH^2}{a_v u_b} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{12r} \right) \quad (3-37)$$

式中 a_v ——竖向压缩系数。

采用常应变速率固结试验测定 C_v 值比采用常规固结试验测定的要高一些, 只有当应变率不大, 二者才接近。常应变速率固结试验一般可较常规固结试验缩短试验周期 80% 以上。

(3) 各种测定方法的比较和讨论 任何固结试验得到的固结系数都不可能与理论值完全吻合。时间对数拟合法和时间平方根拟合法是最常用的两种方法, 时间对数拟合法取自固结度 $U = 50\%$, 试验必须满足 24h 以上, 使包括次固结的这部分曲线能全部绘出, 对于次固结较显著的土, 试验曲线的下半段同时包括主固结和次固结, 所以难以正确确定 d_{100} ; 时间平方根拟合法取自固结度 $U = 90\%$, 试验至少要估计到 $U > 90\%$ 以后, 该法最困难的是初始读数难以正确得到, 因为表针转动太快, 随着自动化记录设备的使用, 此问题可以改善, 该法的另一缺点是中部直线有时难以辨认。因此不同试验得到的固结系数也存在着一一定的差异。

根据最近的研究结果, 固结试验所得到的土的应力—应变—应变速率有唯一的关系。室内测定固结系数时, 一般每级加荷为 1min, 土的应变速率可达到 $1\%/min$, 而平均速率在 $(20 \sim 30)\%/h$ 左右。高应变速率引起极高的孔隙水压力梯度, 使接近排水面表层土体部分结构破坏。而地基的压缩速率一般为 $0.5\%/年$ (高大建筑) 至 $1\%/年$ (填土), 与室内固结试验的压缩速率相差甚远, 这当然会影响到固结系数的准确性。以后应从以下两方面进行改进:

1) 固结试验要控制孔隙压力梯度, 从而得到土的应力—应变—应变速率关系, 据此推测相应于现场应变速率的 C_v 值。

2) 在现场量测孔隙压力来推求 C_v 值, 这样推求的 C_v 值, 既符合现场的应变速率又能符合实际的二维或三维固结条件。

3.2.2 二维与三维固结理论

实际工程中, 二维与三维固结占多数。为了解二维和三维固结问题, Rendulic (1935) 首先将 Terzaghi 一维固结方程推广到多维条件, 得到 Terzaghi - Rendulic 扩散方程。

1. 二维、三维固结方程

设饱和土固结过程中流经土单元体表面的水量变化率与土体体积变化率相等, 则

$$\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = - \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (3-38)$$

式中 k ——渗透系数；

γ_w ——水的重度。

体积应变 ϵ_v 是主应力的函数，即

$$\epsilon_v = f(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) \quad (3-39)$$

于是可得到

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_1} \frac{\partial \sigma'_1}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_2} \frac{\partial \sigma'_2}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_3} \frac{\partial \sigma'_3}{\partial t} \quad (3-40)$$

根据有效应力原理，总应力 σ ，有效应力 σ' 和孔隙水压力 u 的关系为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1 - u \\ \sigma'_2 &= \sigma_2 - u \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 - u \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

将式 (3-41) 代入式 (3-40)，得

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_1} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_2} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_3} \right) \quad (3-42)$$

体积应变对各主应力的变化率相等，即

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_1} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_2} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \sigma'_3} = \frac{1-2\nu'}{E'} \quad (3-43)$$

式中 E' 、 ν' ——土体的有效弹性模量和有效泊松比。

将式 (3-43) 代入式 (3-42)，得

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{1-2\nu'}{E'} \frac{\partial(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\partial t} + \frac{3(1-2\nu')}{E'} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-44)$$

假设当外荷载保持常数时，总应力不随时间变化，式 (3-44) 可改写为

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = - \frac{3(1-2\nu')}{E'} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-45)$$

结合式 (3-45)、式 (3-38)，得

$$\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{3(1-2\nu')}{E'} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-46)$$

或改写为

$$C_{v3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-47)$$

式中 $C_{v3} = \frac{kE'}{3\gamma_w(1-2\nu')}$ 。

方程式 (3-47) 与均质固体散热（热传导）过程的表达式一致，故称它为扩散方程或热传导方程。

二维条件下, 类似可得

$$C_{v2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-48)$$

式中 $C_{v2} = \frac{kE'}{2\gamma_w (1-2\nu') (1+\nu')}$ 。

一维条件下, 则为

$$C_{v1} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-49)$$

式中 $C_{v1} = \frac{k}{\gamma_w (1-2\nu') (1+\nu')} E'$ 。

由上述可见, 土体固结系数与排水条件和变形条件有关, 三种固结条件下的固结系数存在下述关系

$$C_{v1} = 2(1-\nu') C_{v2} = 3 \frac{1-\nu'}{(1+\nu')} C_{v3} \quad (3-50)$$

2. 二维与三维固结方程的解

1948年, Barron 在 Terzaghi 单向固结理论的基础上, 建立了轴对称固结基本微分方程, 并在两种假设条件下, 采用分离变量法给出了解析解, 它在砂井地基上得到了广泛的应用。

一砂井如图 3-8 所示, 砂井的直径为 $d_w = 2r_w$, 其影响范围直径为 $d_e = 2r_e$, 砂井长度为 $2H$, 上、下面均为排水面。圆柱坐标 rOz 如图所示, 在一定的压力下, 土中的水沿径向和竖向流动。砂井固结方程如式 (3-51) 所示

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3-51)$$

式中 C_v ——固结系数。

若土体水平向固结系数和竖向固结系数不相同, 上式可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + C_{vv} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3-52)$$

式 (3-52) 即为 Terzaghi - Rendulic 固结理论轴对称条件固结方程。采用分离变量法求解, 则

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = C_{vv} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (3-53)$$

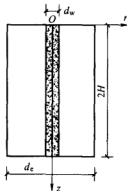


图 3-8 砂井剖面

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = C_{vh} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3-54)$$

式(3-53)为 Terzaghi 一维固结方程, 已有解答; 式(3-54) Barron 在两个假设的基础上给出了解。两假设为: ①自由应变假设。假定在砂井影响范围内圆柱土体中各点的竖向变形是自由的。但由于砂井附近土体固结速率要比远离砂井的土体的固结速率快, 径向各点固结速率不同, 就会产生不均匀的变形, 并产生剪切变形。自由应变假设就是假设沿径向不同的固结速率产生的不均匀变形不影响应力的分布以及沿径向固结速率的分布。②等应变假设。假定在砂井影响范围内圆柱体土样中同一水平面上各点的竖向变形是相等的。

自由应变假设条件下的式(3-54)的解比等应变假设条件下的解复杂, 实际情况是介于上述两种假设之间。Richart (1957) 研究表明: 当井径比 ($n = d_e/d_w$) 大于 5 时, 两种假设条件下所得到的地基固结度很接近。自由应变固结解可参见文献 [3], 下面介绍等应变条件下 Barron 给出的解答。土体中径向坐标 r 处任意时间 t 的孔隙水压力为

$$u_r = \frac{4u_{av}}{d_e^2 F(n)} \left[r_e^2 \ln \left(\frac{r}{r_w} \right) - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right] \quad (3-55)$$

式中 d_e 、 r_e ——砂井影响范围圆柱体的直径和半径;

r_w ——砂井半径;

u_{av} ——时间 t 时土中孔隙水压力的平均值, 可表示为 $u_{av} = u_i e^\lambda$;

u_i ——超孔隙水压力的平均值。

其中

$$\lambda = \frac{-8T_h}{F(n)} \quad (3-56)$$

$$T_h = \frac{C_{vh}}{d_e^2} t \quad (3-57)$$

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \ln(n) - \frac{3n^2}{4n^2 - 1} \quad (3-58)$$

式中 C_{vh} ——径向固结系数;

t ——时间;

n ——井径比, $n = d_e/d_w$ 。

结合式(3-56)及 u_{av} 的表达式, 得

$$\frac{u_{av}}{u_i} = \exp \left[\frac{-8T_h}{F(n)} \right] \quad (3-59)$$

根据固结度的定义, 可得径向平均固结度 U_r

$$U_r = 1 - \exp\left[\frac{-8T_h}{F(n)}\right] \quad (3-60)$$

砂井地基的总固结度取决于竖向排水固结和径向排水固结, 砂井地基总固结度 U_{Σ} 可以采用式 (3-61) 计算

$$U_{\Sigma} = 1 - (1 - U_r)(1 - U_z) \quad (3-61)$$

式中 U_z ——竖向排水引起的地基固结度, 按 Terzaghi 一维固结理论计算。

在固结过程中, 地基土体中固结排出的水流向砂井, 再通过砂井流向垫层而排出。实际工程中的砂井对渗流具有一定的阻力, 并对土体的固结速率产生影响, 通常称为井阻作用。此外, 在设置砂井过程中, 对砂井周围的土体也会产生一定的扰动作用, 在砂井表面有一定的涂抹作用。上述理论对此没有考虑。如果考虑井阻和涂抹作用, 砂井存在临界长度问题, 且当砂井长度超过某一长度时, 增加砂井长度对加速地基固结作用甚小。

上述理论解是对单个砂井分析得到的, 砂井地基是群井情况, 将单井的解答推广到群井也会带来误差; 并且砂井考虑的是理想井。

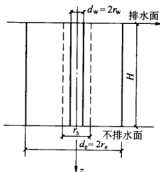


图 3-9 非理想砂井剖面

曾国熙、谢康和 (1990) 得到了考虑井阻和涂抹作用的非理想井固结理论。非理想井剖面如图 3-9 所示, 图中 H 为软土层竖向排水距离。双面排水时, 砂井长度为 $2H$, 单面排水时, 砂井长度为 H 。砂井直径和半径记为 d_w 和 r_w , 砂井井料渗透系数为 k_w , 涂抹区半径为 r_s , 涂抹区内土体的渗透系数 k_s , 砂井影响区直径和半径记为 d_e 和 r_e , 其竖向和水平向渗透系数为 k_v 和 k_h 。则径向排水固结方程式可改写为

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = \begin{cases} C_{vh} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) \frac{k_s}{k_h} & r_w \leq r \leq r_s \\ C_{vh} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) & r_s \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (3-62)$$

另外, 在径向排水固结过程中, 砂井和土体间的流量连续方程为

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = - \frac{zk_s}{\gamma_w k_w} \frac{\partial u_r}{\partial r} \bigg|_{r=r_w} \quad (3-63)$$

式中 u_r ——仅考虑径向排水固结时, 土体中超静孔隙水压力;

u_r ——仅考虑径向排水固结时, 土体中平均超静孔隙水压力;

u_w ——砂井内超孔隙水压力；

C_{vh} ——土体水平向固结系数；

t ——时间。

边界条件和初始条件为

$$\textcircled{1} \quad r = r_e \text{ 时, } \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0;$$

$$\textcircled{2} \quad r = r_w \text{ 时, } u_r = u_w;$$

$$\textcircled{3} \quad z = 0 \text{ 时, } u_w = 0;$$

$$\textcircled{4} \quad z = H \text{ 时, } \frac{\partial u_w}{\partial z} = 0;$$

$$\textcircled{5} \quad t = 0 \text{ 时, } \bar{u}_r = u_0 = p_0。$$

其中 p_0 为瞬时施加的均布荷载密度, u_0 为初始超静孔隙水压力。

满足上述边界条件和初始条件的式 (3-62) 和式 (3-63) 的解为

$$u_r = \begin{cases} u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n + D} \left[\frac{k_h}{k_s} \left(\ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_e^2} \right) + D \right] \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_n t} & r_w \leq r \leq r_s \\ u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_n + D} \left[\left(\ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_e^2} \right) + \frac{k_h}{k_s} \left(\ln s - \frac{s^2 - 1}{2n^2} \right) + D \right] \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_n t} & r_s \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (3-64)$$

$$u_w = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D}{F_n + D} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_n t} \quad (3-65)$$

$$\bar{u}_r = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} e^{-B_n t} \quad (3-66)$$

式中 n ——井径比, $n = \frac{r_e}{r_w}$;

$$s = \frac{r_s}{r_w};$$

$$B_n = \frac{8C_{vh}}{(F_n + D)d_e^2}$$

$$D = \frac{8G(n^2 - 1)}{M^2 n^2}$$

$$M = \frac{2m+1}{2} \pi, m = 0, 1, 2;$$

G ——井阻因子, $G = \frac{k_h}{k_w} \left(\frac{H}{d_w} \right)^2$ 。

$$F_s = \left(\ln \frac{n}{s} + \frac{k_h}{k_s} \ln s - \frac{3}{4} \right) \frac{n^2}{n^2 - 1} + \frac{s^2}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{k_h}{k_s} \right) \left(1 - \frac{s^2}{4n^2} \right) + \frac{k_h}{k_s n^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)$$

由式 (3-66) 可得砂井地基的径向固结度 \bar{U}_r 为

$$\bar{U}_r = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} e^{-\beta_m t} \quad (3-67)$$

式 (3-64) ~ 式 (3-67) 为等应变条件下砂井地基考虑井阻和涂抹作用径向排水固结问题的精确解。

当不考虑井阻和涂抹作用时 (即理想井问题时, $G = 0$, $s = 1$ 或 $k_h/k_s = 1$), 非理想井固结问题解 (式 (3-64) 和式 (3-67)) 蜕化为理想井问题解 (式 (3-55) 和式 (3-59)), 理想井理论中, 砂井井料中超静孔隙水压力等于零。

若边界条件较为复杂, 很难得到多维固结方程的解析解, 而常采用有限差分法和有限元法求解, 具体的求解方法可参看有关土工数值分析的内容。

3.3 Biot 固结理论

Terzaghi 固结理论只在一维情况下是精确的, 对二维、三维问题并不精确。Biot (1940) 从连续介质的基本方程出发, 推导了能准确反映孔隙压力消散与土骨架变形相互关系的三维固结方程, 建立了 Biot 固结理论。

3.3.1 固结方程

在土体中取出一微单元体, 则三维条件下平衡方程表达式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-68)$$

式中 X, Y, Z —— x, y, z 方向单元体体力。

根据饱和土有效应力原理给出有效应力 σ' 、孔隙水压力 u_w 和总应力 σ 之间关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x + u_w \\ \sigma_y &= \sigma'_y + u_w \\ \sigma_z &= \sigma'_z + u_w \end{aligned} \right\} \quad (3-69)$$

反映土体形变和位移的几何方程为 (以压缩为正)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= -\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-70)$$

式中 u 、 v 、 w —— x 、 y 、 z 方向土体位移。

设土体骨架变形服从胡克定律, 即

$$\Theta' = 3K\epsilon_v \quad (3-71)$$

式中 Θ' ——有效应力之和, $\Theta' = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z$;

ϵ_v ——体积应变, $\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$;

K ——体积模量。

物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{3K-2G}{3}\epsilon_v + 2G\epsilon_x \\ \sigma'_y &= \frac{3K-2G}{3}\epsilon_v + 2G\epsilon_y \\ \sigma'_z &= \frac{3K-2G}{3}\epsilon_v + 2G\epsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (3-72)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\}$$

式中 G ——剪切模量。

土体中渗流服从 Darcy 定律, 即

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial u_w}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial u_w}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial u_w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

根据饱和土的连续性, 固结过程中单位时间内流经单元土体表面的水量与单位时间内土体体积改变是相等的, 得连续条件

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (3-74)$$

将几何方程 (3-70) 代入物理方程 (3-72), 再代入有效应力原理方程 (3-69), 然后代入平衡方程 (3-68), 可得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\partial u_w}{\partial x} + X &= 0 \\ \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v - \frac{\partial u_w}{\partial y} + Y &= 0 \\ \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w - \frac{\partial u_w}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-75)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

将几何方程 (3-70) 和 Darcy 定律 (3-73) 代入连续方程 (3-74), 得

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} + \frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3-76)$$

由胡克定律得

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{3K} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (3-77a)$$

或

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{3K} \frac{\partial (\Theta - 3u_w)}{\partial t} \quad (3-77b)$$

式中 $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

代入到式 (3-76), 得

$$\frac{1}{3K} \frac{\partial (\Theta - 3u_w)}{\partial t} + \frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3-78)$$

式 (3-75) 和式 (3-78) 即为 Biot 固结理论方程, 它是包含四个偏微分方程的方

程组。结合边界条件和初始条件,联立求解式(3-75)和式(3-78)即可得到地基中任一点任一时刻的位移 u 、 v 、 w 值和孔隙水压力值 u_w 。

当 Θ 保持常量时,式(3-78)就退化为扩散方程, Terzaghi-Rendulic 固结理论可视为 Biot 固结理论的一种特殊情况。

对于二维平面应变问题,在 xOz 平面内, $\epsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$, 或 $u = u(x, z)$, $v = 0$, $w = w(x, z)$, 则式(3-75)和式(3-78)可以改写为

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\partial u_w}{\partial x} + X &= 0 \\ \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 u - \frac{\partial u_w}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3-79)$$

$$\frac{1}{3K} \frac{\partial (\Theta - 3u_w)}{\partial t} + \frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3-80)$$

式中 $\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_z$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

对轴对称问题, Biot 固结理论表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u_w}{\partial r} &= 0 \\ \left(\frac{3K+G}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + G \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial u_w}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3-81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{k_r}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_w}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3-82)$$

式中 k_r 、 k_z ——径向(r)和轴向(z)渗透系数;

u 、 w ——径向(r)和轴向(z)土体位移。

要求解式(3-75)和式(3-78)组成的偏微分方程组,在数学上是困难的,对某些简单的情况可导出解析解。如当时 Biot 曾求得条形荷载作用下半无限地基固结问题的解答,后来 Mc Namee 和 Gibson 进一步求得若干特殊问题的解,近期黄传志导出了有限厚土层固结问题的解,但对 Biot 固结理论始终缺乏普遍有效的一般解。因此自 Biot 固结理论建立以来,一直没有在工程中广泛应用。随着计算技术的发展,特别是有限元法的发展, Biot 固结理论重新出现生命力,并开始应用于实践。

3.3.2 Mandel-Cryer 效应

所谓的 Mandel-Cryer 效应是在一定的条件下,土体固结初期部分土体中孔隙

水压力不仅不消散,而且有上升的现象。这一现象最初为 Mandel 于 1953 年分析柱形土体受均布压力沿柱面向外排水时发现的,后来 Cryer 于 1963 年研究土球受均布压力径向向外排水时,也发现同样现象,故称作 Mandel-Cryer 效应。

为说明 Mandel-Cryer 效应,以图 3-10 所示的圆形土柱径向排水固结情况为例。选取坐标系 ROZ 如图 3-10a 所示, OR 表示圆形土柱的径向, OZ 表示圆形土柱的轴向。圆形土柱四周受均布荷载 P , 圆柱两端为不排水条件, 且轴向位移为零, 圆柱两端摩擦阻力也为零, 四周为排水条件。孔隙水压力沿径向分布以及随时间变化如图 3-10b 所示。从图中可以看出在固结初期, $T_v = 0.01$ 时, 圆柱体中间很大部分土体中孔隙水压力值超过荷载 P 值, 从 $T_v = 0.01$ 发展到 $T_v = 0.05$ 过程中, 圆柱体中心孔隙水压力不仅不消散, 反而上升。

Mandel-Cryer 效应为什么会产生呢? 这是因为土体在荷载作用下, 由于边界排水, 靠近边界处土体很快固结, 土中有效应力增大, 土体产生收缩变形, 对内部土体产生压缩力, 从而引起超静孔隙水压力的进一步提高, 其提高量大于土体排水固结引起超静孔隙水压力的下降量时, 出现部分土体中超静孔隙水压力大于荷载作用值, 即产生 Mandel-Cryer 效应。这就解释了为什么球形土体四周受压情况下, 初期 Mandel-Cryer 效应最显著, 而一维压缩时, 不会产生 Mandel-Cryer 效应。

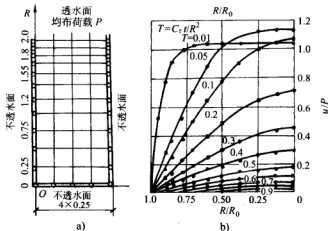


图 3-10 圆柱形径向排水固结

还要指出的是,在某些情况下的二维、三维问题,按 Terzaghi 理论计算也会出现局部区域孔隙水压力的初期升高。这与 Mandel-Cryer 效应有原则的区别。如图 3-11 所示的土层上下两面排水,地面作用有局部荷载,初期孔隙水压力分布为上部大下部小,如图中实线所示。用 Terzaghi 方程计算会出现中间某一区域,初期孔隙水压力略有升高,如图 3-11 中 AB 段所示,这是由于初始孔隙水压力在

这一段的坡度随深度变得平缓,即水力坡降由大变小。如果从中取出一单元体来看,上面水力坡降大,流入的水量多,下面的水力坡降小,流出的流量少,孔隙中的水发生拥挤,则孔隙水压力升高,有效应力降低,土体膨胀。如果下部边界不透水,此现象更加明显。这种孔隙水压力的初期升高是以体积膨胀、有效应力降低来换取的,它是总应力变化引起的,因此不是 Mandel-Cryer 效应。

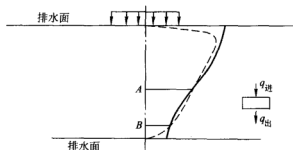


图 3-11 局部区域初期孔隙水压力的升高

3.3.3 Biot 固结理论和 Terzaghi-Rendulic 固结理论的比较

下面从几个方面进行阐述,以便更清楚地了解它们的区别和联系。

1. 建立方程所依据的假设

两种理论的假设是基本一致的,即土体骨架线弹性、变形微小、渗流符合 Darcy 定律等。但是有一个原则区别,那就是 Terzaghi 理论增加了一个假定——在固结过程中法向总应力和不随时间而变,即 $\Theta = \text{const}$ 。若增加此假定, Biot 将得出与 Terzaghi 方程完全一致的形式。

2. 孔隙压力与位移的关系

Biot 固结理论考虑了孔隙水压力与土骨架变形的耦合作用; Terzaghi-Rendulic 固结理论,孔隙水压力与土骨架变形分别计算。

由于两种理论在假定上有差别,导致建立的方程形式不同。Terzaghi 方程中只含孔隙水压力一个未知变量,与位移无关; Biot 方程则是包含孔隙压力和位移的联立方程组。Terzaghi 方程在推导过程中应用了有效应力原理、连续性条件式 (3-76),对物理方程只用了与体积变形有关的式 (3-71),在作了总应力和不变的假定后把应力和应变从方程中消去,只剩下孔隙压力一个变量,因此,不需要引入几何方程,不需将孔隙压力与位移联系起来,孔隙压力的消散仅仅决定于孔隙压力的初始条件和边界条件,与固结过程中位移的变化无关;而 Biot 固结理论没有作总压力和为常量的假定,在方程中不能将应力或应变消去,故需完整地引入物理方程,进而引入几何方程,最后把孔隙压力与位移联系起来。这就可以反

映固结过程中位移与孔隙压力的相互影响,或者说反映了二者的耦合。

实际土体的固结过程中,孔隙压力的变化总是与土的位移分不开的。有些问题中,孤立地分析孔隙压力的变化,不与位移联系,仅仅带来一定的误差;但有些问题不将两者结合起来就很难给出合理的结果。以加筋土堤坝的固结为例,在堤坝底部设置的拉筋没有改变地基土所受的荷重,也没有改变地基的排水条件,按 Terzaghi 理论分析,加筋与不加筋孔隙消散压力是一样的。而事实上,拉筋与土体间的摩阻力阻碍了地基土的侧向位移,减小了土体的侧膨胀,对孔隙压力的消散是有影响的;反之,孔压的消散使变形发展,又使拉筋与土体之间的摩阻力随时间变化。孔压与位移是紧密相联的,只有用 Biot 理论才能进行合理的计算,反映拉筋的作用。

Biot 固结理论在解孔隙压力的同时也解出位移的变化,这种位移解要比 Terzaghi 方法间接估算沉降更符合实际。地基的沉降包括初始沉降、固结沉降和次固结沉降。其中初始沉降,对于饱和土来说是由形状变形引起的。Terzaghi 理论只能用来近似计算固结沉降,即由孔隙压力变化推求各时刻固结度,进而求沉降。而 Biot 固结方程,不仅解出了沉降,还解出了水平位移,这是 Terzaghi 理论所无法解决的。

3. 孔隙压力随时间的变化

假定不同、方程不同,两种理论解得的孔隙水压力结果也就不同。

图 3-12 表示采用 Biot 固结理论和 Terzaghi-Rendulic 固结理论分析得到的条形基础轴线一点孔隙水压力消散情况,图 3-13 表示粘土层顶面排水、底面不排水的柔性条形基础的固结度

和时间因子关系随泊松比和基础半宽 b 与土层厚度 H 之比的变化。图中还给出了 Terzaghi 一维固结理论的计算结果。从图 3-12 中可以看出, Terzaghi 理论不能反映 Mandel-Cryer 效应。除固结起始段外,由 Biot 固结理论和 Terzaghi 固结理论得到的超静孔隙水压力消散过程是十分相近的。从图 3-13 可以看出,由于 Mandel-Cryer 效应,土层固结度采用 Biot 固结理论的计算结果要小于用 Terzaghi-Rendulic 固结理论

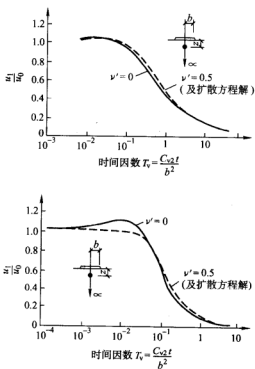


图 3-12 扩散方程与 Biot 理论解
孔隙水压力消散的比较

的计算结果,且 Terzaghi 固结理论曲线与泊松比 ν 无关,而 Biot 曲线受 ν 的影响较显著,若 ν 小则固结慢,反之 ν 大则固结快。

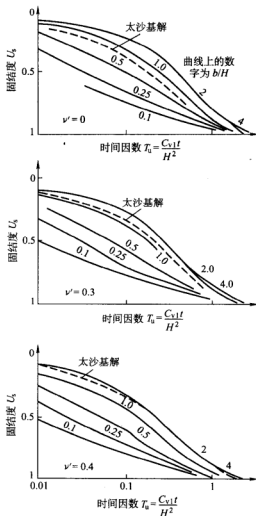


图 3-13 时间因子与固结度的关系 (条形基础)

3.4 土的大变形固结理论

新近沉积的超软土、尾矿坝、人工吹填土、水坠坝冲填土等,在自重及堆载作用下将产生很大的固结沉降,这些地方往往产生较大应变,变形量有时超过 20%。这时其固结系数也随时间而变,这类超软粘土具有大变形非线性固结的特性,如果仍用小应变理论计算可能带来较大误差。因此需要考虑大变形固结理

论。

3.4.1 基本理论

大变形理论涉及一些专门知识，为此需对有关的专门概念作一般说明。

设 x_i^0 ($i = 1, 2, 3$, 下同) 为质点的初始坐标, u_i 为其变位, 则 $x_i = x_i^0 + u_i$ 即为变位后的坐标。大变形问题有两种描述方法。一种是以初始构形描述的 Lagrange 法, 此时同坐标点意味着同一质点, 故此法又称物质描述法。另一种是瞬时构形描述的 Euler 法, 此时某一坐标点在不同时刻由不同的质点所占据, 故此法又称空间描述法。但 Lagrange 描述法有一个变种称为坐标更新法, 简称 UL 法, 即在每一荷载增量结束时把坐标更新一次, 然后在从变位后坐标出发进行下一级荷载增量计算, 而始终采用初始坐标的方法则称为全 Lagrange 法, 简称 TL 法。

1. 变形梯度

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} = \delta_{ij} \times \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} \quad (3-83)$$

式中 δ_{ij} ——单位张量;

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0}$ ——位移梯度。

2. Green 应变张量

$$E_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0} \right) \quad (3-84)$$

该式用于初始构形描述, 其中重复脚标表示求和, 以压缩为正。

3. Euler 应变张量

$$e_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (3-85)$$

该式用于瞬时构形描述。

4. Cauchy 应力张量

作用于单位面积上 j 方向的力 t_j 可以写为

$$t_j = n_i \sigma_{ij} \quad (3-86)$$

式中 n_i ——该面法向与坐标轴 i 交角的方向余弦;

σ_{ij} ——Cauchy 应力。

Cauchy 应力应用于瞬时构形描述, 与小应变的应力张量相同。

5. 第一 Piola-Kirchhoff 应力张量

$$\sigma_{ij}^* = J \sigma_{ik} F_{kj}^{-1} \quad (3-87)$$

式中 J ——Jacob 矩阵, $J = \det F_{ij} = \frac{dV}{dV_0}$, 为变形前后的体积比。

该式是把瞬时构形上法向 n 面上的力化到初始构形法向 n_0 面上而得到, 与变形前后的两点均有关系, 故属于两点张量。该张量是不对称的, 不能用于应力—应变关系的描述。

6. 第二 Piola-Kirchhoff 应力张量

$$\sigma_{ij}^0 = J F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{lj}^{-1} = F_{ik}^{-1} \sigma_{kj}^* \quad (3-88)$$

该式只涉及到初始构形上一点的应力张量, 它是一种二阶对称张量, 代表变形前单位面积上的力, 可以用于与 Green 应变张量匹配的应力—应变关系表达。

3.4.2 固结方程

大变形固结理论的一些基本假设与 Terzaghi 理论的假设是基本相同的, 不同之处是压缩系数不被认为是常数, 即有效应力与孔隙比之间有非线性关系; 渗透系数与孔隙比有关; 渗透速度以孔隙水与骨架的相对速度来表示。下面采用 Lagrange 的物质描述法, 也即坐标系统用 x_i^0 , 应变用 Green 应变 E_{ij} , 应力用第二 Piola-Kirchhoff 应力 σ_{ij}^0 。

1. 平衡方程

空间描述法的平衡方程与小应变时一样, 而当用物质描述法时, Cauchy 应力需改为第一 Piola-Kirchhoff 应力, 后者根据式 (3-87) 应写为 $F_{ik}\sigma_k$, 故相应的方程式应为

$$\frac{\partial}{\partial x_j^0} (F_{ik}\sigma_{kj}^0) - f_i = 0 \quad (3-89)$$

式中 f_i ——体积力。

式 (3-89) 的增量方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_j^0} (F_{ik}\Delta\sigma_{kj}^0 + \Delta F_{ik}\sigma_{kj}^0) - \Delta f_i = 0 \quad (3-90)$$

2. 本构方程

$$\Delta\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij}\Delta u_w = D_{ijkl}^0\Delta E_{kl} \quad (3-91)$$

3. 几何方程

把式 (3-85) 写成增量形式

$$\Delta E_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial\Delta u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0} \frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_j^0} + \frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_j^0} \right) \quad (3-92)$$

4. 连续方程

不计静水压力下的渗流运动, 以超静孔隙水压力 u_w 为变量, 此时

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} - \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left(k_i \frac{\partial u_w}{\partial x_i^0} \right) = 0 \quad (3-93)$$

式中 k_i —— i 方向渗透系数。

把本构关系式 (3-91) 和几何方程式 (3-92) 代入平衡方程式 (3-90) 中, 只保留二次项, 略去三次项, 则

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\frac{1}{2} \delta_{ik} D_{kjl m}^0 \left(\frac{\partial \Delta u_l}{\partial x_m^0} + \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_l^0} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k^0} D_{kjl m}^0 \left(\frac{\partial \Delta u_l}{\partial x_m^0} + \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_l^0} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\frac{1}{2} \delta_{ik} D_{kjl m}^0 \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m^0} \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_l^0} + \frac{\partial u_l}{\partial x_l^0} \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_m^0} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\sigma_{kj}^0 \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_k^0} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j^0} \left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k^0} \right) \delta_{kj} \Delta u_w \right] - \Delta f_i = 0 \end{aligned} \quad (3-94)$$

另一方面, 体应变公式为

$$\epsilon_v = 1 - \frac{dV}{dV^0} = 1 - \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1^0} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2^0} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1^0} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2^0} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3^0} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1^0} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2^0} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3^0} \end{vmatrix} \quad (3-95)$$

把右端行列式展开后只保留二次项, 并对时间求导后代入式 (3-94), 可得

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2^0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1^0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_2^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1^0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_1^0} \frac{\partial}{\partial x_2^0} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1^0} \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2^0} \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2^0} \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \\ & \frac{\partial u_1}{\partial x_2^0} \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2^0} \frac{\partial}{\partial x_3^0} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3^0} \frac{\partial}{\partial x_1^0} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_3^0} \frac{\partial}{\partial x_2^0} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial}{\partial x_i^0} \left(k_i \frac{\partial u_w}{\partial x_i^0} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-96)$$

式 (3-96) 构成了以 Δu_1 、 Δu_2 、 Δu_3 和 Δu_w 为变量的大变形固结问题的控制方程式。

式(3-91)中 σ_{ij}^0 和 E_{ij} 为初始构形上定义的应力和应变,而非真实的应力和应变,因而模量矩阵 D_{ijkl}^0 也与通常意义下 D_{ijkl} 的不同。将式(3-88)和从式(3-84)和式(3-85)得到的 E_{ij} 与 e_{ij} 的关系式代入式(3-91)中,可得 D_{ijkl}^0 的表达式如下,即

$$D_{ijkl}^0 = JF_{im}^{-1}F_{jn}^{-1}F_{kp}^{-1}F_{lq}D_{mnpq} + F_{kp}^{-1}F_{ij}D_{pq}^0 - F_{in}^{-1}F_{ln}^{-1}\sigma_{ik}^0 - F_{im}^{-1}F_{lm}^{-1}\sigma_{jk}^0 \quad (3-97)$$

D_{mnpq} 即为按小变形理论确定的模量矩阵。

3.4.3 固结方程的解法

用大变形固结理论计算饱和和软粘土的固结问题,实质就是根据初始条件和边界条件解偏微分方程式(3-94)和式(3-96),由于上述方程是高度非线性的,即使简单的边界条件也难以求得解析解,通常都是将上述方程简化成线性方程或拟线性方程用数值方法求解。

将位移和孔隙水压力通过节点位移 $\{u\}$ 和节点孔隙水压力 $\{u_w\}$ 表示,即

$$\{u\} = [N]\{u\} \quad (3-98a)$$

$$\{u_w\} = [\bar{N}]\{\bar{u}_w\} \quad (3-98b)$$

式中 $[N]$ 、 $[\bar{N}]$ —— u 和 u_w 的形函数。

采用 Green 应变,将是(3-98a)代入(3-92)后可得

$$\{\Delta E\} = [\tilde{B}]\{\Delta u\} \quad (3-99)$$

式中

$$[\tilde{B}] = [B_{L0}] + [B_{L1}] + [B_N] \quad (3-100)$$

右边第一项 $[B_{L0}] = [L][N]$,与小应变的表达式一样,即与式(3-92)中前面两项相当。第二项 $[B_{L1}] = [A][G]$,与式(3-92)中的中间两项相当, $[A]$ 为位移梯度矩阵, $[G]$ 为转换矩阵。第三项 $[B_N] = \frac{1}{2}[\Delta A][G]$,相当于式(3-92)的最后一项, $[\Delta A]$ 是 $[A]$ 的增量形式。这一项的存在将使大变形问题变成增量非线性问题,即增量方程式的系数中将包含增量本身,从而大大增加求解的难度。为了达到线性化,往往删去这一项,事实上在推导式(3-94)时已这样做了。

把式(3-98)代入式(3-96)中,可得与式(3-96)类似的有限元公式,而矩阵 $[K]$ 应改为 $[\tilde{K}]$

$$[\tilde{K}] = \int [\tilde{B}][D^0][\tilde{B}]d\Omega \quad (3-101)$$

此处的 $[\tilde{B}]$ 应当用式(3-100)代入,而 $[D^0]$ 则要用式(3-97)计算。

Gibson 等用固结系数 C_F 将方程(3-94)和(3-96)表示成与 Terzaghi 固结系数相似的形式,即

$$C_F = - \frac{k(e)(1+e_0)^2 d\sigma'}{\gamma_w(1+e) de} \quad (3-102)$$

式中 e 、 e_0 —— t 时刻的孔隙比、初始孔隙比；

k ——渗透系数。

对于薄粘土层可忽略自重应力对固结的影响，故有

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(C_F \frac{\partial e}{\partial a} \right) = \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3-103)$$

设 C_F 与孔隙比 e 有线性关系

$$C_F = C_0 + \alpha(e - e_0) \quad (3-104)$$

式中 C_0 、 α ——常数。

Gibson 等用上述方法对不同情况下的饱和薄软土层进行了固结计算。

Gibson 等人还采用固相坐标系，并设

$$g(e) = - \frac{k(e)}{\gamma_w(1+e)} \frac{d\sigma'}{de} \quad (3-105)$$

$$\lambda(e) = - \frac{d}{de} \left(\frac{de}{d\sigma'} \right) \quad (3-106)$$

将 $g(e)$ 、 $\lambda(e)$ 视为常数，并以 g 和 λ 表示，则有线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} - \lambda(G_s - 1)\gamma_w \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3-107)$$

式 (3-106) 反映了孔隙比与有效应力的关系， G_s 为土的饱和重度， z 为固相坐标，可变换成下列形式

$$e = (e_0 - e_\infty)e^{-\lambda\sigma'} + e_\infty \quad (3-108)$$

式中 e_∞ ——最大固结压力作用下的稳定孔隙比。

用数值方法对厚土层进行不同情况的固结计算

Cargill 等采用 Gibson 类似的方法通过数值计算，得出了一套可用于手算的计算图表，应用较方便，现介绍如下。对固结方程式 (3-107) 进行无量纲化，为此引入中间变量

$$E(Z, t) = \frac{e(z, t)}{e(0, 0)} \quad (3-109)$$

$$Z = \frac{z}{l} \quad (3-110)$$

$$T_t = \frac{gt}{l^2} \quad (3-111)$$

$$\lambda l (G_s - 1) \gamma_w = N \quad (3-112)$$

式中 l ——固相坐标系的土层厚度。

则方程 (3-107) 变为无量纲方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} - N \frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\partial E}{\partial T_f} \quad (3-113)$$

根据不同的初始条件及边界条件, 用数值法解上述方程, 得出 $E(Z, T_f)$ 的数值。

定义固结度为某一时刻的沉降量 $S(t)$ 与最终沉降量 $S(\infty)$ 之比, 则固结度为

$$U(t) = \frac{S(t)}{S(\infty)} = \frac{\int_0^l [e(z, 0) - e(z, t)] dz}{\int_0^l [e(z, 0) - e(z, \infty)] dz} \quad (3-114)$$

变换成无量纲的形式, 则

$$U(T_f) = \frac{\int_0^l [E(Z, 0) - E(Z, T_f)] dz}{\int_0^l [E(Z, 0) - E(Z, \infty)] dz} \quad (3-115)$$

根据不同的初始条件及边界条件, 用数值法解上述方程, 得出固结度 $U(T_f)$ 与时间因数 T_f 的关系, 绘出图表, 利用图表便可进行固结计算。

3.5 土的动力固结理论

动力固结计算是一个十分复杂而又意义的研究课题, 一般是将不排水条件下动荷载作用的孔隙水压力发展模式与 Tezaghi 固结理论或者 Biot 固结理论加以耦合来定量求解孔隙水压力的演化过程。然而, 动荷载作用下的孔压消散过程本身要受到孔压发展的影响, 而且动孔压和静孔压的消散是两个不同的固结过程。Christian 以及 Seed 等基于各自的孔隙水压力发展模式对地震荷载作用下的孔隙水压力增长和消散过程给出了各自的解答。在国内动力固结法常称为“强夯法”, 文献 [3] 描述了其室内试验和差分数值解法, 文献 [22] 则概括了最近的研究成果。本节将叙述动荷载作用下的渗透固结模式, 为动力荷载作用下的固结计算问题提供理论依据。

3.5.1 动静荷载耦合的孔隙水压力

不排水条件下动荷载作用引起的孔隙水压力发展模式可一般地表达如下

$$u_d = F(M, t) \quad (3-116)$$

式中 u_d ——动荷载引起的孔隙水压力;

M ——表征土体物理力学性质的参数;

t ——时间。

式 (3-116) 是在静孔隙水压力为零的条件下得出的。考虑动静荷载的耦合作用则相应有不同的孔隙水压力发展模式。于是式 (3-116) 可表达为另一种形式

$$u_d = u_f (1 - e^{-\beta \frac{t}{t_f}}) = u_f F\left(\frac{t}{t_f}\right) \quad (3-117)$$

式中 u_f ——孔压可能发展的最大值；

β ——与土体物理力学性质有关的参数；

t_f ——相应于 u_f 的时间；

t ——时间。

静载的变化 ($\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3$) 或 ($\Delta p, \Delta q$) 引起的孔隙水压力 Δu_s 可由下式计算

$$\begin{aligned} \Delta u_s &= \frac{1}{3} (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3) + \alpha [(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 + (\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1)^2]^{1/2} \\ &= \Delta p + \sqrt{2} \alpha \Delta q \end{aligned} \quad (3-118)$$

式中 α ——复杂应力状态下的孔隙水压力系数。

当 $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$ 时则为轴对称条件下的情形，它与 Skempton 孔压系数有如下关系

$$A = \sqrt{2} \alpha + \frac{1}{3} \quad (3-119)$$

结合式 (3-117) 和式 (3-118) 则可得考虑静孔隙水压力对动孔隙水压力影响的孔压计算公式

$$u_d = (u_f - \Delta u_s) F\left(\frac{t}{t_f}\right) \quad (3-120)$$

显然，当 $\Delta u_s = 0$ 时， $u_d = u_f F(t/t_f)$ ，此即无静孔压存在时的动孔压发展模式。而当 $\Delta u_s = u_f$ 时， $u_d = 0$ ，无动孔压产生。图 3-14 说明了动静荷载耦合的孔隙水压力。

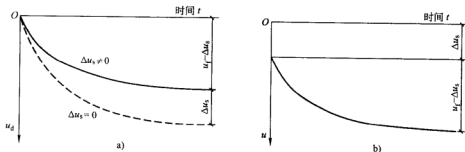


图 3-14 动静荷载耦合的孔隙水压力

a) u_d-t 关系 b) $u-t$ 关系

3.5.2 动静荷载耦合的固结计算

1. 动静荷载耦合作用下的基本固结微分方程式

假设土中孔隙水的流动符合 Darcy 定理, 则根据水流连续条件有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x \partial u}{\gamma_w \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y \partial u}{\gamma_w \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z \partial u}{\gamma_w \partial z} \right) = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (3-121)$$

式中 u ——超孔隙水压力;

k_x, k_y, k_z —— x, y, z 三个方向的渗透系数;

γ_w ——水的重度;

ϵ_v ——体积应变。

在时间间隔 dt 内单元体内孔隙水压力变化量为 du 。同时土样承受动荷载的作用, 由此而引起的附加孔压增量为 $\frac{u_d}{t} dt$ 。这里 u_d 为动荷载引起的孔隙水压力。于是, 时间间隔 dt 内土体的体积变化为

$$d\epsilon_v = m_r \left(du - \frac{\partial u_d}{\partial t} dt \right) \quad (3-122)$$

式中 m_r ——动荷载作用下的体积压缩系数。

式 (3-122) 也可写成

$$\frac{d\epsilon_v}{dt} = m_r \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_d}{\partial t} \right) \quad (3-123)$$

结合式 (3-121) 和式 (3-123) 则可得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x \partial u}{\gamma_w \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y \partial u}{\gamma_w \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z \partial u}{\gamma_w \partial z} \right) = m_r \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_d}{\partial t} \right) \quad (3-124)$$

如果渗透系数 k_x, k_y, k_z 为常量, 则有

$$\frac{k_x}{\gamma_w m_r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w m_r} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\gamma_w m_r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_d}{\partial t} \quad (3-125)$$

如果为强夯, 实用上 u_d 常表示为动荷载作用次数 N 的函数关系, 即

$$u_d = g(N) \quad (3-126)$$

此时, 进一步有

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} = \frac{\partial u_d}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \quad (3-127)$$

式 (3-125) 还可以写成

$$C_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{vy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{vz} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_d}{\partial t} \quad (3-128)$$

式中 $C_{vx} = \frac{k_x}{\gamma_w m_r}$, $C_{vy} = \frac{k_y}{\gamma_w m_r}$, $C_{vz} = \frac{k_z}{\gamma_w m_r}$, 分别为 x 、 y 、 z 三个方向的固结系数, 应该注意, 对动荷载作用下孔压消散的再固结过程, C_{vx} 、 C_{vy} 、 C_{vz} 应相应取再固结系数 C_v (为简便计, 可仍用 C_v , 并称为固结系数)。

对于二维和一维的情况, 式 (3-128) 可进一步简化为

$$C_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{vy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_d}{\partial t} \quad (\text{二维}) \quad (3-129)$$

和

$$C_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_d}{\partial t} \quad (\text{一维}) \quad (3-130)$$

由式 (3-116) 可知

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} = \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} = f(M, t) \quad (3-131)$$

将式 (3-131) 代入式 (3-130), 则有一维情况下

$$C_{vx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - f(M, t) \quad (3-132)$$

式 (3-132) 表明, 已知动荷载作用下的孔压发展模式即可得出相应的固结微分方程。

2. 动荷载作用下固结微分方程的一般解析解

对于一维的情形 (图 3-15), 考虑部分排水条件下饱和土层内有一定起始孔压场的情形, 可给出式 (3-132) 的定解条件, 即

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(z) \\ u|_{t \rightarrow \infty} &= 0 \\ u|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-133)$$

二维和三维的情况类似的可由式 (3-134) 和式 (3-135) 给出。

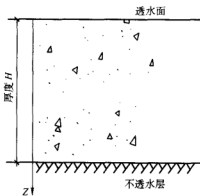


图 3-15 一维情况

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(z, x) \\ u|_{t \rightarrow \infty} &= 0 \\ u|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=R_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-134)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(z, x, y) \\ u|_{t \rightarrow \infty} &= 0 \\ u|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=R_1} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=R_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-135)$$

式(3-134)和式(3-135)中,认为距所讨论土层区域较远处(二维和三维条件分别用 R_1 和 $R_1 \times R_2$ 取较大值来反映)孔隙水压力仅沿垂直方向扩散。

对于由式(3-132)和式(3-133)构成的一维非齐次扩散方程的混合边值问题,利用叠加原理、分离变量原理和齐次化原理容易求得其一般的解析解为

$$\begin{aligned} u(z, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2 c_v t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t A'_n(\tau) e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2 c_v (t-\tau)} d\tau \sin\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right) \end{aligned} \quad (3-136)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{H} \int_0^{2H} \varphi(z) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right) dz \\ A'_n(\tau) &= \frac{1}{H} \int_0^{2H} f(M, \tau) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2H}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (3-137)$$

对于由式 (3-134) 和式 (3-129) 以及由 (3-135) 和式 (3-128) 组成的二维及三维非齐次扩散方程的混合边值问题可类似的求得其一般的解析解。

对二维情况有

$$u(z, x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{m,n} e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{R_1}\right)^2 C_{vx} + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 C_{vx}\right]t} \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right)x + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t E_{m,n}^*(\tau) e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{R_1}\right)^2 C_{vx} + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 C_{vx}\right](t-\tau)} d\tau \right) \times \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right)x \quad (3-138)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} E_{m,n} &= \frac{2}{HR_1} \oint_{\Omega} (z, x) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right) x dz dx \\ E_{m,n}^*(\tau) &= \frac{2}{HR_1} \oint_{\Omega} f(M, \tau) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right) x dz dx \\ \Omega &: \{0 \leq z \leq H, x \geq 0\} \end{aligned} \right\} \quad (3-139)$$

对三维情况, 有

$$u(z, x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{m,n,k} e^{-\lambda_{m,n,k} t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right) x \cos\left(\frac{k\pi}{R_2}\right) y + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t E_{m,n,k}^*(\tau) e^{-\lambda_{m,n,k}(t-\tau)} d\tau \right) \times \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right) x \cos\left(\frac{k\pi}{R_2}\right) y \quad (3-140)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{m,n,k} &= \left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right)^2 C_{vx} + \left(\frac{m\pi}{R_1}\right) C_{vx} + \left(\frac{m\pi}{R_2}\right) C_{vy} \\ E_{m,n,k} &= \frac{4}{HR_1 R_2} \oint_{\Omega} (z, x, y) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right) x \cos\left(\frac{k\pi}{R_2}\right) y dz dx dy \\ E_{m,n,k}^*(\tau) &= \frac{4}{HR_1 R_2} \oint_{\Omega} f(M, \tau) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2H}\right) z \cos\left(\frac{m\pi}{R_1}\right) x \cos\left(\frac{k\pi}{R_2}\right) y dz dx dy \\ \Omega &: \{0 \leq z \leq H, x \geq 0, y \geq 0\} \end{aligned} \right\} \quad (3-141)$$

3.5.3 固结微分方程的进一步讨论

以一维情形为例对上述解析解作进一步讨论。

1) 动静荷载耦合的孔压消散过程。考虑静应力场对动孔压的影响, 则式(3-136)和式(3-137)中的 $f(M, \tau)$ 应由式(3-120)中的 u_d 对 t 求导, 即 $(u_f - u_s)$ $f(t/t_f)$ 来取代。

2) 初始孔压场为零的情况。对于 $\varphi(z) = 0$ 的情况, 由式(3-136)和式(3-137)可知 $A_n = 0$, 故 $u(z, t)$ 只有第二项。由此, 只要已知 $\varphi(z) = 0$ 的具体表达式即可求得 $u(z, t)$ 。

3) 若以动荷载结束时刻作为初始时刻($t = 0$), 则固结基本微分方程式(3-132)退化为 Tezaghi 单向渗透固结微分方程式

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-142)$$

此时, 动荷载作用下的初始孔压场 $\varphi(z) \neq 0$ 。即动孔压消散过程可由式(3-142)求解。

动力固结法处理软土地基时, 比起再固结过程, 冲击荷载作用的时间极短, 因此可事先估算冲击荷载作用引起的地层内孔隙水压力场的分布, 然后再按式(3-142)计算孔压的消散过程。

4) 由式(3-136)和式(3-137)可知, 即使对于一维情况也只有在 $\varphi(t)$ 和 $f(M, \tau)$ 非常简单时才可以求出孔隙水压力的分布 $u(z, t)$ 的具体表达式, 否则只有用数值法计算。Booker 为分析排水对砂土液化的影响给出了一个基于差分运算的有限元模式。

3.6 非饱和土的固结理论

如果不考虑水土界面上的收缩膜, 非饱和土是一种三相体, 除包含可以认为是不可压缩的固相土粒和液相水外, 还含有一定数量的可压缩气体。非饱和土在荷载作用下固结的机理与饱和土在荷载作用下的固结机理存在着显著的差别。

饱和土固结理论的建立, 是以土体积变化的连续条件为基础的, 即认为在固结过程中, 土的体积的任何变化, 都是土中水在静水压力梯度下从土体中排出的结果。对于非饱和土, 因土中气体具有很高的压缩性, 当这部分气体与外界连通时, 由于孔隙气体压力的作用, 一部分气体要从土体中排出。与此同时, 未排出的气体在压力作用下体积发生变化, 密度改变, 而且还有一定的气体要溶解于水中。对于以气泡形式存在于孔隙水中的封闭气体, 也会发生体积改变与溶解的现象。由此, 要建立严格的连续条件是比较困难的。

当土体孔隙中的流体兼有水与气时, 研究它们的渗透性, 通常是近似地将其

当作两种不混合流体的运动问题来处理。尽管如此,也不易得到解答。对于饱和粘土,一般可以认为土中渗流服从 Darcy 定律,这时渗透系数 k 基本是常量,它与含水率和作用水压力无关。而对于非饱和土,不仅要涉及两种介质的渗透性,并且都与土的含水率和吸力密切相关。此外,对于给定状态的土,当由湿到干或由干到湿达到同一含水率时,渗透性也不一致。再者非饱和土的渗透系数受土的结构性的影响相当显著,因此,要测定渗透系数,并且为了确保土的结构性不受影响,常需要非常规的测试技术。

对于非饱和土,许多学者在饱和土的基础上,提出了有效应力、总应力的表达式,但这些表达式的正确性,尤其是适用性,还需要接受实践的检验。再加上表达式中各参数的测定比较复杂,往往不易得到稳定的数值。如果再计及非饱和土渗流的非线性以及固结过程中水、气的相互作用,问题的求解难度将更大。故有关非饱和土的研究进展非常缓慢,至今仍没有一个公认的可实际应用的非饱和土固结问题的成熟的理论方法。

国外从 20 世纪 60 年代开始研究非饱和土的固结问题,以往的工作大致可以分为三类:

1) 从 Biot 固结理论出发,只考虑孔隙水的运动。这类方法不能反映孔隙气体运动的影响,也无法求解湿陷变形、湿胀变形和干缩变形等特殊问题。

2) 从 Terzaghi 固结理论出发,同时考虑孔隙气和孔隙水的运动,联合求解孔隙水压力消散方程和孔隙气压力消散方程。它放弃了有异议的非饱和土有效应力原理,代之以两个独立的应力状态变量外加应力 ($\sigma - u_a$) 和吸力 ($u_a - u_w$) 来建立非饱和土各相(固、水、气)的体应变本构方程。这样建立的本构方程,能较好地与饱和土的固结理论衔接,同时又能反映湿陷、湿胀和干缩等特性,但是该方法为了导出孔隙压力的消散方程,采用了过多的假设。

3) 从孔隙气相和孔隙水相的质量连续方程出发,将 Uatyas 和 Radhakrishna 的土体孔隙比 e 状态方程和饱和度 s_r 状态方程联合起来求解,该方法实质上是第二种方法的改进,它放弃了许多简化假设,以便更真实、更精确地反映固结的本质。国内对非饱和土的固结也进行了一些研究工作。其中杨代泉提出的考虑气、水、气、热运动以及土骨架变形耦合作用的非饱和土广义固结理论,较全面地反映各种客观因素对广义固结的影响。

非饱和土固结理论的建立完全是 20 世纪 90 年代的事,其中以 Fredlund 的非饱和土的固结理论较为完善,下面作简要介绍。

3.6.1 应力状态变量的选择

虽然一般认为非饱和土是三相体,但 Fredlund 从“相”的定义出发,将非饱和土视为四相体系,即将水土分界面作为第四相,并称其为收缩膜(contractile

skin), 这是因为该膜是不同于其两侧介质的另一种物质。这样, 土骨架与收缩膜在力系作用下处于平衡状态, 而水、气两相则在压力梯度下流动。

为了研究土体的平衡, Fredlund 选用了静应力 $(\sigma - u_a)$ 和基质吸力 $(u_a - u_w)$ 作为应力状态变量。如图 3-16 所示。

3.6.2 基本方程

1. 连续条件

假设土粒不可压缩, 收缩膜无体变可言, 则土体的体积变化符合下列方程

$$\frac{\Delta V_v}{V_0} = \frac{\Delta V_w}{V_0} + \frac{\Delta V_a}{V_0} \quad (3-143)$$

式中 V_0 ——土体的总体积;

ΔV_w 、 ΔV_a ——水相与气相的体积变化。

由此可见, 知道了式 (3-143) 中三种体积变化的任两种, 即可得到第三者。故需建立两个体积变化的性状方程。土体的体积变化有

$$\frac{dV_v}{V_0} = m_{1k}^s d(\sigma - u_a) + m_2^s d(u_a - u_w) \quad (3-144)$$

水的体积变化有

$$\frac{dV_w}{V_0} = m_{1k}^w d(\sigma - u_a) + m_2^w d(u_a - u_w) \quad (3-145)$$

式中 V_v 、 V_w ——单元体中的孔隙体积和水体积;

m_{1k}^a 、 m_{1k}^w —— k_0 条件下净法向应力变化 $d(\sigma - u_a)$ 时土骨架体积和水体积变化系数;

m_2^a 、 m_2^w —— k_0 条件下净基质吸力变化 $d(u_a - u_w)$ 时土骨架体积和水体积变化系数。

对于气相, 其体积变化为

$$\frac{dV_a}{V_0} = m_{1k}^a d(\sigma - u_a) + m_2^a d(u_a - u_w) \quad (3-146)$$

式中 m_{1k}^a 、 m_2^a ——气相的相应的体积变化系数。

2. 渗透定律

液相渗流符合 Darcy 定律

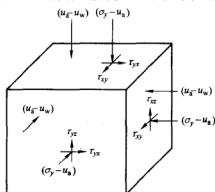


图 3-16 非饱和土上的作用力系

$$v = - \frac{k_z \partial u}{\gamma_w \partial z} \quad (3-147)$$

式中 v 、 k_z ——渗流速度和 z 方向的渗透系数。

土中气体的流动符合 Fick 定律

$$J_a = - D_a^* \frac{\partial c}{\partial z} = - D_a \frac{\partial c}{\partial u_a} \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (3-148)$$

式中 J_a ——通过单位面积土的空气流量；

D_a^* ——传导系数；

D_a ——土中空气流动的传导系数；

c ——空气的浓度，单位体积土中空气的质量，是绝对气压的函数。

3. 物理方程

流体在恒温条件下的压缩性定义为：单位体积的流体由于压力变化而引起的体积改变，可以用式 (3-149) 表示

$$C = - \frac{1}{V} \frac{dV}{du} \quad (3-149)$$

式中 C 和 du ——流体的压缩性和压力变化。

按上述定义，可以求出恒温时土中气相的压缩性

$$C_a = \frac{1}{u_a} = \frac{1}{u_a + u_{at}} \quad (3-150)$$

式中 \bar{u}_a ——空气压力，以绝对压力计，故 $\bar{u}_a = u_a + u_{at}$ 。

u_a ——空气压力；

u_{at} ——大气压力。

土中空气和水混合体的压缩性 C_w^w 为

$$C^{aw} = S_r C_w \left(\frac{du_w}{d\sigma} \right) + (1 - S_r + h S_r) \left(\frac{du_a}{d\sigma} \right) \frac{1}{u_a} \quad (3-151)$$

式中 h ——亨利溶解系数；

S_r 和 C_w^w ——饱和度和水的压缩性。

$$C^w = - \frac{1}{v_w} \frac{dv_w}{du_w} \quad (3-152)$$

3.6.3 固结方程

1. 基本假设

基本假设与 Terzaghi 对饱和土提出的假设类似，但补充以下几点假定：①气相是连续的；②在固结过程中，土骨架及其中各相的体积变化系数 m_{1k}^s 、 m_{1k}^w 和

m_2^w , m_2^w 保持常量; ③ 不考虑气体溶解于水和气蒸发。

2. 液相微分方程

单向固结时, 通过非饱和土单元体的水的净流量为

$$\frac{\partial V_w}{\partial t} = \left(v_w + \frac{\partial V_w}{\partial z} dz \right) dx dy - v_w dx dy \quad (3-153)$$

式中 V_w ——水在 z 方向上的流速;

v_w ——土中水的体积。

简化上式, 则

$$\frac{\partial \left(\frac{V_w}{V_0} \right)}{\partial t} = \frac{\partial v_w}{\partial z} \quad (3-154)$$

由 Darcy 定律, 得

$$\frac{\partial \left(\frac{V_w}{V_0} \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(-k \frac{\partial h_w}{\partial z} \right)}{\partial z} = -\frac{k_w}{\rho_w g} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial k_w}{\partial z} \frac{\partial u_w}{\partial z} - \frac{\partial k_w}{\partial z} \quad (3-155)$$

式中 h_w ——水头, 为重力水头和孔隙压力水头之和, 即 $z + \frac{u_w}{\rho_w g}$, 其中 ρ_w 为水的密度。

$$\frac{\partial \left(\frac{V_w}{V_0} \right)}{\partial t} = m_{1k}^w \frac{\partial (\sigma - u_a)}{\partial t} + m_2^w \frac{\partial (u_a - u_w)}{\partial t} \quad (3-156)$$

由式 (3-155) 和式 (3-156) 相等, 得到液相微分方程的普遍形式

$$m_2^w \frac{\partial u_w}{\partial t} = - (m_{1k}^w - m_2^w) \frac{\partial u_a}{\partial t} + \frac{k_w}{\rho_w g} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial k_w}{\partial z} \frac{\partial u_w}{\partial z} + \frac{\partial k_w}{\partial z} \quad (3-157)$$

即

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = -C_w \frac{\partial u_a}{\partial t} + C_v^w \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} + \frac{C_v^w}{k_w} \frac{\partial k_w}{\partial z} \frac{\partial u_w}{\partial z} + C_g \frac{\partial k_w}{\partial z} \quad (3-158)$$

式中 C_w ——与液相偏微分方程有关的相互作用系数, 即 $\left(1 - \frac{m_2^w}{m_{1k}^w} \right) / \left(\frac{m_2^w}{m_{1k}^w} \right)$;

C_v^w ——考虑液相的固结系数, 即 $\frac{k_w}{\rho_w g m_2^w}$;

C_g ——重力项系数, 即 $1/m_2^w$ 。

与其他项相比,重力项可以忽略不计,同时假设 k_w 不随位置而变,则式 (3-158) 变为

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = -C_w \frac{\partial u_a}{\partial t} + C_w \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \quad (3-159)$$

3. 气相微分方程

通过非饱和单元土体净气流质量速率为

$$\frac{\partial M_a}{\partial t} = \left(J_a + \frac{\partial J_a}{\partial z} dz \right) dx dy - J_a dx dy \quad (3-160)$$

或

$$\frac{\partial \left(\frac{M_a}{M_0} \right)}{\partial t} = \frac{\partial J_a}{\partial z} \quad (3-161)$$

将式 (3-148) 代入式 (3-161) 得

$$\frac{\partial \left(\frac{M_a}{M_0} \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(-D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial z} \right)}{\partial z} \quad (3-162)$$

式 (3-162) 中空气质量应等于其体积 V_a 乘以密度 ρ_a , 即 $M_a = V_a \rho_a$, 对上式右侧加以推导, 并整理得

$$\rho_a \frac{\partial \left(\frac{V_a}{V_0} \right)}{\partial t} + \frac{V_a}{V_0} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -D_a^* \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} - \frac{\partial D_a^*}{\partial z^2} \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (3-163)$$

空气体积与土的体积存在下列关系

$$V_a = (1 - S_r) n V \quad (3-164)$$

式中 S_r ——饱和度;

n ——孔隙率;

V ——土单元体的当前总体积。

由于假设固结时土发生小应变, 土的体积 V 可假设为 V_0 。所以式 (3-163) 有

$$\rho_a \frac{\partial \left(\frac{V_a}{V_0} \right)}{\partial t} + (1 - S_r) n \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -D_a^* \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} - \frac{\partial D_a^*}{\partial z^2} \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (3-165)$$

根据波义尔定律, 理想气体的密度与压力的关系为

$$\rho_a = \frac{\omega_a -}{RT} \mu_a \quad (3-166)$$

式中 ω_a ——气体的摩尔质量 (kg/kmol);

R ——摩尔气体常数 $[8.31\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})]$;

T ——热力学温度 K , $T = t_0 + 273.16$;

t_0 ——摄氏温度 ($^{\circ}\text{C}$);

\bar{u}_a ——绝对孔隙压力 ($\bar{u}_a = u_a + \bar{u}_s$) (kPa)。

将式 (3-166) 代入式 (3-165), 并整理得

$$\frac{\partial\left(\frac{V_a}{V_0}\right)}{\partial t} = -\frac{D_a^*}{\left(\frac{\omega_a}{RT}\right)_{u_a}} \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} - \frac{(1-S_r)n}{\bar{u}_a} \frac{\partial u_a}{\partial t} - \frac{1}{\left(\frac{\omega_a}{RT}\right)_{u_a}} \frac{\partial D_a^*}{\partial z^2} \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (3-167)$$

式 (3-167) 中的左边可由式 (3-146) 对 t 求导而得, 令二式相等, 并整理得到气相偏微分方程的普遍形式

$$-\left(m_{1k}^a - m_2^a - \frac{(1-S_r)n}{u_a}\right) \frac{\partial u_a}{\partial t} = m_2^a \frac{\partial u_w}{\partial t} - \frac{D_a^*}{\left(\frac{\omega_a}{RT}\right)_{u_a}} \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} - \frac{1}{\left(\frac{\omega_a}{RT}\right)_{u_a}} \frac{\partial D_a^*}{\partial z^2} \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (3-168)$$

可简化式 (3-168) 得

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -C_a \frac{\partial u_w}{\partial t} + C_v^a \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} + \frac{C_v^a}{D_a^*} \frac{\partial D_a^*}{\partial t} \frac{\partial u_a}{\partial z} \quad (3-169)$$

式中 C_a ——与气相偏微分方程有关的相互作用常数, 即

$$\frac{\frac{m_2^a}{m_{1k}^a}}{1 - \frac{m_2^a}{m_{1k}^a} - (1-S_r)n(\bar{u}_a m_{1k}^a)}$$

$$C_v^a \text{——与气体有关的固结系数, 即 } \frac{D_a^*}{\left(\frac{\omega_a}{RT}\right)_{u_a} m_{1k}^a} \frac{1}{\left(1 - \frac{m_2^a}{m_{1k}^a}\right) - (1-S_r)n}$$

式 (3-169) 中如果忽略气相透射率的变化, 即令 $\frac{\partial D_a^*}{\partial z} = 0$, 则有

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -C_a \frac{\partial u_w}{\partial t} + C_v^a \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} \quad (3-170)$$

固结方程组式 (3-159) 和式 (3-170) 可通过数值方法求解, 得孔隙水压力和孔隙气压力, 进而求得液相和气相的平均固结度。

3.7 土的流变理论

土体变形与应力和时间有关的现象称为土的流变现象。土力学中的所谓“次固结”实际上就是一维流变，土的流变是土的重要的工程性质之一。在工程实践中，土的流变现象主要包括以下几个方面。

- 1) 蠕变——即恒定应力作用下变形随时间增长的现象。
- 2) 松弛——即恒定变形的情况下应力随时间衰减的现象。
- 3) 流动——即给定的时间的变形速率随应力变化的现象。
- 4) 长期强度随受荷历史变化的现象。

土的流变变形分为压缩与剪切两大类。沉降分析中主要考虑土受压时的流变特性，强度问题则主要研究土受剪时的流变特性。

土的流变性质首先与土的结构有关，无论砂土还是粘土都具有一定程度的流变性质。土的流变性质还与应力大小和温度有关。

3.7.1 常用流变模型

1. 基本元件模型

弹性、塑性和粘性是连续介质的三种基本性质，各自在一定条件下反映材料本构关系的一个方面的特性。理想弹性模型、理想塑性模型（或称刚塑性模型）和理想粘性模型是反映这三种性质的理想模型，通常称为简单模型。实际工程材料的本构关系可以用这些简单模型的各种组合来构成。

(1) 弹性模型 如图 3-17a 所示，弹性模型又称胡克弹性模型，常用理想弹簧表示。其本构方程为胡克定律。一维条件下，如单轴压缩和纯剪情况下，表达式分别为

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3-171)$$

$$\tau = G\gamma \quad (3-172)$$

式中 E ——弹性模量；

G ——剪切变模量。

三维条件下的本构方程可表示为

$$\sigma_m = K\varepsilon_v \quad (3-173)$$

$$S_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (3-174)$$

式中 K ——体积模量。

弹性模型的特点是应力和应变是一一对应的，受外力作用则产生瞬时变形。

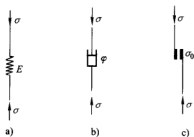


图 3-17 基本流变模型

a) 弹性模型 b) 粘性模型 c) 塑性模型

同时这种变形转化为弹性能储存在它的内部,外力撤出后,变形立即全部恢复,弹性也能相应释放出来。

(2) 粘性模型 如图 3-17b 所示,粘性模型又称牛顿粘滞体模型,通常用牛顿粘壶表示。该粘壶是一个带孔的活塞在充满牛顿液体的圆筒中运动。活塞在粘滞液体中的移动速度与所受阻力成正比关系,反映了粘性介质内一点的应力与该点处的应变速率成正比例关系的性质。一维条件下,如单轴压缩和纯剪情况下,本构方程的表达式分别为

$$\sigma = \varphi \dot{\epsilon} \quad (3-175)$$

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (3-176)$$

式中 φ, η ——粘滞系数, $\eta = \frac{\varphi}{2(1+\nu^*)}$, ν^* 为粘性应变速率的横向比值,对

理想粘性体 $\varphi = 3\eta$ 。

三维条件下的理想粘性体的本构方程可表示为

$$S_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij} \quad (3-177)$$

粘性模型的变形在应力撤除后是不可恢复的。在外力作用下,它产生与时间有关的粘性流动,在流动过程中消耗了外力所施加的能量。

(3) 塑性模型 如图 3-17c 所示,塑性模型又称 Saint-Venant 塑性模型,或称刚塑性模型。通常采用两块接触的粗糙面表示,面上存在有一起始摩擦阻力,与作用在面上的法向压力无关,是一常数。若外作用力小于此起始摩擦阻力,物体不发生变形。一维条件如单轴压缩或纯剪情况,当轴向应力或剪应力小于某一数值时,物体不发生变形;当轴向应力或剪应力等于某一数值时,物体产生流动,变形无限制增长。理想塑性模型的体积应变等于 0。在三维条件下理想塑性体的本构方程表达式为

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } S_{ij} < \Theta_{ij} \text{ 时, } \dot{e}_{ij} = 0 \\ \text{当 } S_{ij} = \Theta_{ij} \text{ 时, } S_{ij} = 2\lambda \dot{e}_{ij} \end{array} \right\} \quad (3-178)$$

式中 Θ_{ij} ——起始摩擦阻力,或称塑性条件;

λ ——比例常数。

式 (3-178) 表明,理想塑性体的塑性偏应变量的变化率与应力偏量成正比。

在外力作用下,材料进入塑性流动,应力与应变不存在着一一对应关系,塑性流动与粘性流动存在着本质的区别。

2. 粘弹性模型

既具有弹性又具有粘性的介质称为粘弹性体。蠕变和应力松弛现象是人们熟悉的也是特别受重视的粘弹性性质。粘弹性性质的特点是在本构方程中除了有应力和应变项外,还包括有它们对时间的导数的项。对线性粘弹性介质,其本构方程的一般表达式为

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + \cdots + a_m^{(m)}\sigma = b_0\epsilon + b_1\dot{\epsilon} + \cdots + b_n^{(n)}\epsilon \quad (3-179)$$

式中 a 、 b ——与材料性质有关的参数。

(1) Maxwell 模型 如图 3-18a 所示, Maxwell 模型由胡克弹簧和牛顿粘壶串联而成, 其流变方程为

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\varphi} = \dot{\epsilon} \quad (3-180)$$

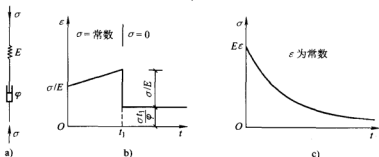


图 3-18 Maxwell 模型及其蠕变、松弛曲线

a) 模型 b) 蠕变曲线 c) 松弛曲线

在不变应力 σ 作用下, 用初始应力 $\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E}$ 求解式 (3-180) 得

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\varphi} t \quad (3-181)$$

若在 t_1 时刻将应力卸除, 则 $t \geq t_1$ 时刻的应变为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\varphi} t_1 \quad (3-182)$$

可见, 卸荷后蠕变变形完全不能恢复, 如图 3-18b 所示。

在土体获得初始弹性应变 ϵ_0 后, 总应变 ϵ 保持不变, 求解式 (3-180) 得

$$\sigma = E\epsilon e^{-\frac{t}{\varphi}} \quad (3-183)$$

可见, 在总应变不变条件下, 应力随时间衰减, 如图 3-18c 所示。因此 Maxwell 模型又称松弛模型。

(2) Kelvin 模型 如图 3-19a 所示, Kelvin 模型由胡克弹簧和牛顿粘壶并联而成, 其流变方程为

$$\sigma = E\epsilon + \varphi\dot{\epsilon} \quad (3-184)$$

在常应力作用下, 利用初始条件 $\epsilon_0 = 0$ 求解式 (3-184) 得

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\varphi}} \right) \quad (3-185)$$

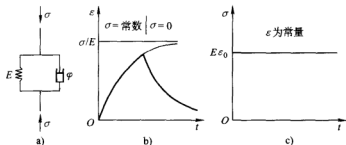


图 3-19 Kelvin 模型及其蠕变、松弛曲线

a) 模型 b) 蠕变曲线 c) 松弛曲线

若在 t_1 时刻将应力卸除, 则 $t \geq t_1$ 时刻的应变为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \left(e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_1)} - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \quad (3-186)$$

其中 $t \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon \rightarrow 0$, 即应变可完全恢复, 如图 3-19b 所示。Kelvin 模型描述的这种现象称为弹性后效。

若获得初始弹性应变 ϵ_0 后, 总应变保持不变, 求解式 (3-184) 得

$$\sigma = E\epsilon_0 \quad (3-187)$$

即应力不衰减, 如图 3-19c 所示。故 Kelvin 模型又称非松弛模型。

(3) 标准线性固体模型 如图 3-20 所示, 标准线性固体模型又称三单元固体模型, 其中由胡克弹簧模型和 Kelvin 模型串联而成, 称为 K-H 模型; 由胡克弹簧模型和 Maxwell 模型并联而成, 称为 H/M 模型。对 K-H 模型其流变方程为

$$\varphi_1 \dot{\epsilon} + E_1 \epsilon = \frac{E_0 + E_1}{E_0} \sigma + \frac{\varphi_1}{E_0} \dot{\sigma} \quad (3-188)$$

或

$$b_1 \dot{\epsilon} + b_0 \epsilon = \sigma + a_1 \dot{\sigma} \quad (3-189)$$

$$\text{式中 } a_1 = \frac{\varphi_1}{E_0 + E_1}, \quad b_0 = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}, \quad b_1 = \frac{E_0 \varphi_1}{E_0 + E_1}.$$

在常应力 σ 作用下, 利用初始条件 $\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0}$, 求解式 (3-188) 得

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\varphi_1} t} \right) \quad (3-190)$$

若将应力卸除, 应变可全部恢复, 如图 3-20b 所示。

若获得初始瞬时弹性应变 ϵ_0 后, 总应变 ϵ 保持 ϵ_0 不变, 求解式 (3-188) 得

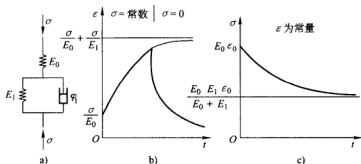


图 3-20 K-H 模型及其蠕变、松弛曲线

a) 模型 b) 蠕变曲线 c) 松弛曲线

$$\sigma = \frac{E_0 \epsilon_0}{E_0 + E_1} \left(E_1 + E_0 e^{-\frac{E_0 + E_1}{\eta_1} t} \right) \quad (3-191)$$

应力部分松弛, 如图 3-20c 所示。

对 H/M 模型, 其流变方程的形式同式 (3-188), 但 a_1 、 b_0 、 b_1 应为

$$a_1 = \frac{\varphi_1}{E_1}, b_0 = E_0, b_1 = \frac{(E_0 + E_1)\varphi_1}{E_1} \quad (3-192)$$

(4) Burger 模型 图 3-21a 所示为 Burger 模型, 又称 Schiffman 模型, 由 Maxwell 模型和 Kelvin 模型串联而成, 其流变方程为

$$\varphi_1 \ddot{\epsilon} + E_1 \dot{\epsilon} = \frac{\varphi_1}{E_0} \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{E_1}{E_0} + \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_1}{\varphi_0} \sigma \quad (3-193)$$

在常应力作用下, 应变为

$$\epsilon = \sigma \left[\frac{1}{E_0} + \frac{t}{\varphi_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\varphi_1} t} \right) \right] \quad (3-194)$$

它是非渐止的, 如图 3-21b 所示。

(5) 广义的 Maxwell 模型

如图 3-22 所示, 广义的 Maxwell 模型是由一个线性弹簧模型和一系列 Maxwell 模型并联而成, 若 $t = 0$ 时模型获得的单位弹性应变 $\epsilon_0 = 1$ 后, 保持总应变不变, 模型中的应力随时间的变化等于各简单模型之和, 即

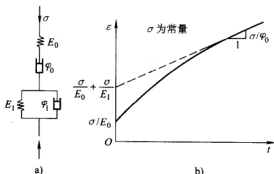


图 3-21 Burger 模型及其蠕变

a) 模型 b) 蠕变曲线

$$G(t) = E_0 + \sum_i E_i e^{-\frac{t}{n_i}} \quad (3-195)$$

式中 $G(t)$ ——松弛弹性模量，等于单位总应变所对应的应力；

$$n_i \text{——松弛时间，} n_i = \frac{\varphi_i}{E_i}。$$

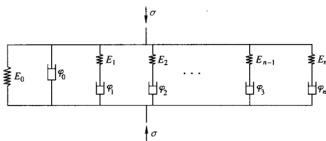


图 3-22 广义的 Maxwell 模型

若模型的应变可以用 $\varepsilon(t)$ 表示，其本构方程可由叠加原理得到

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (3-196)$$

利用分部积分法，式 (3-196) 可改写为

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) G(0) + \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{dG(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau \quad (3-197)$$

式 (3-197) 又可简写为

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) E + \int_0^t \varepsilon(\tau) R(t-\tau) d\tau \quad (3-198)$$

式中 $R(t-\tau) = \frac{dG(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ ， $E = G(0)$ 。

(6) 广义的 Kelvin 模型 如图 3-23 所示，广义的 Kelvin 模型是由一系列 Kelvin 模型和一个 Maxwell 模型串联而成。若 $t=0$ 时模型受到单位应力 $\sigma=1$ 后保持不变，模型的总应变等于各个简单模型的应变之和，即

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{\varphi_0} t + \sum_i \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\eta_i t}) \quad (3-199)$$

式中 $J(t)$ ——蠕变柔度，等于单位应力引起的应变；

$$\eta_i \text{——衰减系数，} \eta_i = \frac{E_i}{\varphi_i}，\text{其倒数为延迟时间。}$$

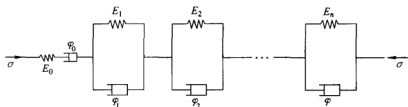


图 3-23 广义的 Kelvin 模型

若模型的应力用 $\sigma(t)$ 表示, 其本构方程可由叠加原理得到

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (3-200)$$

利用分部积分法, 上式可改写为

$$\epsilon(t) = \sigma(t) J(0) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t - \tau)}{d(t - \tau)} d\tau \quad (3-201)$$

式中 $J(0) = \frac{1}{H}$

式 (3-201) 又可简写为

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{H} + \int_0^t \sigma(\tau) K(t - \tau) d\tau \quad (3-202)$$

式中 $K(t - \tau) = \frac{dG(t - \tau)}{d(t - \tau)}$

该式又称为线性遗传方程。

3. 粘塑性模型

既具有塑性又具有粘性的介质称为粘塑性体。粘塑性体在荷载作用下, 当应力达到某一临界值时, 屈服和流动线性发生, 其变形速率与介质的粘性有关。介质的粘塑性可由粘性模型和塑性模型组合而成。

如图 3-24 所示, Bingham 模型由理想刚塑性模型和牛顿粘壶并联而成。显然, Bingham 模型只有当应力达到屈服极限时, 才开始变形。在此以前表现为刚性, 屈服以后, 呈现出粘塑性性质。其本构方程为

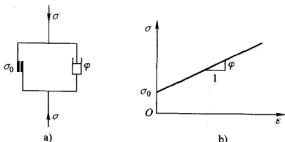


图 3-24 Bingham 模型及其应力-应变关系曲线

a) Bingham 模型 b) 应力-应变关系曲线

$$\sigma = \sigma_s + \varphi \dot{\epsilon} \quad (3-203)$$

故有

$$\dot{\epsilon} = \begin{cases} 0 & \sigma < \sigma_s \\ \frac{\sigma - \sigma_s}{\varphi} & \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (3-204)$$

3.7.2 饱和粘弹性土体的固结理论

在 Terzaghi 和 Biot 固结理论中均假设土骨架为理想弹性介质, 这里重新假定土骨架为粘弹性介质, 粘弹性模型的最一般形式为广义的 Kelvin 模型和广义的 Maxwell 模型 (如图 3-22 和图 3-23 所示), 下面将从广义的 Kelvin 模型出发进行讨论。

广义的 Kelvin 模型的应力应变关系如式 (3-203) 所示, 对其进行 Laplace 变换可得

$$\tilde{\epsilon} = \lambda \tilde{J} \tilde{\sigma} \quad (3-205)$$

式中 λ ——变换参数。

由此式可见, 与弹性理论相比, 粘弹性理论中只需把原为杨氏模量 E 的地方换成 $\frac{1}{\lambda \tilde{J}}$ 即可。

在泊松比为常量的情况下, 上式可扩展为

$$\left\{ \tilde{\sigma} \right\} = \frac{1}{\lambda \tilde{J} (1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \left\{ \tilde{\epsilon} \right\} \quad (3-206)$$

对式 (3-78) 进行 Laplace 变换, 如果只考虑静力问题, 可得

$$\lambda \frac{1}{3\kappa} \frac{\partial (\tilde{\Theta} - 3\tilde{u}_w)}{\partial t} + \frac{k_x}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \tilde{u}_w}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \tilde{u}_w}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \tilde{u}_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3-207)$$

由于平衡方程和几何方程不含时间 t ，对它们的 Laplace 变换将不出现参数 λ ，因此对式 (3-76) 进行 Laplace 变换只需把式中的 G 换成 $\tilde{G} = \frac{1}{2\lambda \tilde{J} (1+\nu)}$ 即可，由此得

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\kappa + \tilde{G}}{3} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}_v}{\partial x} + \tilde{G} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\partial \tilde{u}_w}{\partial x} + X &= 0 \\ \left(\frac{3\kappa + \tilde{G}}{3} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}_v}{\partial y} + \tilde{G} \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial \tilde{u}_w}{\partial y} + Y &= 0 \\ \left(\frac{3\kappa + \tilde{G}}{3} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}_v}{\partial z} + \tilde{G} \nabla \cdot \mathbf{w} - \frac{\partial \tilde{u}_w}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (3-208)$$

由此可见，经 Laplace 变换成的粘弹性介质的固结方程形式上将与弹性多孔介质的固结方程一致。如果已有弹性理论解，只要把原弹性解中出现 E 的地方换成 $\frac{1}{\lambda \tilde{J}}$ ，然后进行 Laplace 逆变换，即可得出同一问题的弹性解答。这个解题思想最先有 E.H. Lee 提出，被称为李氏比拟法。钱家欢在求解固结问题中拓展了李氏比拟法的适用范围。

目前，流变固结耦合问题仍是土的流变学研究的热点，Xie (1996) 给出了半透水边界条件下的线性流变一维固结问题的解析解，1997 年采用三元件模型对循环荷载条件下的线性流变一维固结问题进行了研究，并给出解析解，2002 年对成层软粘土地基的非线性流变固结性状进行了研究。

参 考 文 献

- 1 Skempton A W. Effective Stress in Soils, Concrete and Rocks. In: Pore Pressure and Suction in Soils. Butterworths, 1961
- 2 龚晓南. 高等土力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1996
- 3 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算. 第 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996
- 4 Smith R E and Wahls H E. Consolidation under Constant Rate of Strain, Proc. ASCE, SM2. 1969
- 5 Rendulic L. Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen. Bauingenieur, 1936, 7 (51/53)
- 6 Barron R A. Consolidation of Fine-Grained Soils by Drained Wells. Trans. ASCE, 1948, 113: 718 ~ 733
- 7 曾国熙, 谢康和. 砂井地基固结理论的新发展, 见: 第五届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990
- 8 Biot M A. General Theory of Three-dimensional Consolidation. J. Appl. Phys. 1941, 12: 155 ~ 164
- 9 Mc Namme J, Gibson R E. Plane Strain and Axial Symmetric Problems of the Consolidation of a Semi-infinite Clay Stratum. J. Mech. Appl. Math. 1960, Vol.1 (2)

- 10 黄传志, 肖原. 二维固结问题的解析解. 岩土工程学报, 1996, Vol.18 (3): 47 ~ 54
- 11 Mandel J. Consolidation of Soils. Geotechnique, 1953 (3): 287 ~ 299
- 12 Cryer C W. A Comparison of the Three-dimensional Theories of Biot and Terzaghi. J. Mech. And Appl. Math. 1963, 16: 401 ~ 412
- 13 刘世明. 软粘土的次固结变形特性研究. 杭州: 浙江大学博士论文, 1988
- 14 谢永利, 潘秋元, 曾国熙. 软土地基大变形固结有限元分析, 见: 第七届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994
- 15 周正明. 饱和土大变形固结有限元分析. 水利水运科学研究, 1992 (1): 105 ~ 110
- 16 Gibson R E, England G L, Hussey M J L. The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays, I. Finite Non-linear Consolidation of Thin Homogeneous Layers. Geotechnique, 1967, Vol.17 (3)
- 17 Gibson R E, Schiffman R L, Cargill K W. The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays, II. Finite Non-linear Consolidation of Thin Homogeneous Layers. Canadian Geotechnical Journal, 1981, Vol.18 (2)
- 18 Cargill K W. Prediction of Consolidation of Very Soft Soil. Journal Geotechnical Engineering, 1984, Vol.110 (6)
- 19 Sadigh K. et al. 排水条件对堆石坝地震稳定性的影响. 见: 地震工程和土力学问题译文集. 北京: 地震出版社, 1985
- 20 Seed H. B. 等. 砂土液化的孔隙水压力的变化. 见: 地基与基础译文集. 砂土液化. 北京: 中国建筑工业出版社, 1979
- 21 Seed H. B. et al. Stabilization of Potentially Liquefiable Sand Deposit Using Gravel Drains. Jr. Geotech. Engrg. Div. 1977, 103 (GT7)
- 22 白冰, 肖宏彬. 软土工程若干理论与应用. 北京: 中国水利水电出版社, 2002
- 23 白冰, 刘祖德. 动静耦合的固结计算问题的研究. 武汉水利电力大学学报, 1999, 32 (6)
- 24 张建民, 谢定义. 饱和砂土振动孔隙水压力增长的实用方法. 水利学报, 1991 (8)
- 25 Booker J.R. et al. A Computer Program for the Analysis of Pore Water Pressure Generation and Dissipation During Cyclic or Earthquake Loading. University of California, Berkeley, 1976
- 26 俞培基, 陈愈炯. 非饱和土的水、气形态及其力学性质的关系. 水利学报. 1965 (1): 16 ~ 24
- 27 蒋彭年. 非饱和土工程性质简论. 岩土工程学报. 1989, 11 (6): 39 ~ 59
- 28 杨代泉. 非饱和土广义固结理论及其数值模拟与试验研究: [博士论文]. 南京: 南京水利科学研究院, 1990
- 29 Chen Z H, Xie D Y, Liu Z D. The Consolidation of Unsaturated Soil. In: 7th Conf. Computer Methods and Advances in Geomech, Cairns, 1991, II: 1617 ~ 1621
- 30 Fredlund D G, Rahardio H. 非饱和土力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997
- 31 周德培. 流变力学原理及其在岩土工程中的应用. 成都: 西南交通大学出版社, 1995
- 32 龚晓南. 土的塑性力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1990
- 33 Lee E H. Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies. Quart. of Applied Math., 1955, 13

- 34 Qian J H, Wang S H, Guo Z P. Rheology and Soft Clay Engineering. Marine Geotechnology and Nearshore/offshore Structure, ASTM, STP923, 1986
- 35 Xie, K. H., Li, B. H. and Li, Q. L. A Nonlinear Theory of Consolidation under Time-Dependent Loading. Proce. 2th ICSSE. Nanjing, 1996
- 36 Xie, K. H., Guo, S., Li, B. H. and Zeng, G. X. A Theory of Consolidation for Soils Exhibiting Rheological Characteristics under Cyclic Loading. Proce. of the 9th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Wuhan. 1997 (2): 1053 ~ 1058
- 37 蓝柳和. 成层软粘土地基非线性流变固结性状研究: [博士论文]. 杭州: 浙江大学, 2002

第4章 土的抗剪强度理论

4.1 概述

土的抗剪强度理论有广泛的应用,是研究地基承载力、土压力、土坡等土体稳定分析的理论基础。本科《土力学》教材中已介绍了粘性土和无粘性土抗剪强度的一般特性、指标及其机理分析。大致可以得到这样一种概念:土的抗剪强度不是一个固定不变的值,它随空间和时间而变,并受很多因素的影响,这就构成了土的抗剪强度研究的复杂性。

土的抗剪强度特性与许多因素有关,这些因素包括:土的成分,结构(组构及颗粒间相互连结方式),存在的历史和环境,应力和应变的历史和现状,以及试验方法(试验仪器、排水条件、加荷速率)等。

土的成分是最根本的因素,它包括颗粒本身的矿物组成、风化程度、土体中物质种类及含量、有机质含量、土中水成分及浓度、吸附离子的种类、气体种类及数量等等。

土的结构不仅对粘性土的抗剪强度有重要影响,许多新近的资料表明,它对砂性土也极为重要。土的孔隙比 e 只能笼统地反映土的压实程度,而土的孔隙的大小和分布却更能说明土中的结构状况。粘性土土粒之间,尤其是土团之间的连结强度,往往是构成粘性土抗剪强度的主要部分。

土的历史包括土体整个生成和存在的历史,在这个历史过程中,土产生各种各样的变化,如成分变化、物理化学性质的变化、应力和应变方面的变化,以及含水率的变化(称饱和和历史)。又如粘土抗剪强度的时效效应问题(似超固结特性、蠕变效应、触变效应、长期强度、老化问题、固化问题等等),也属于这个研究范畴或与之有关。实际上就是以发展和变化的观点来研究土的抗剪强度特性。

上述主要因素大都与土中固相和液相有关,但土中的气相(如非饱和土)有时也会对土的抗剪强度产生重要影响。

4.2 无粘性土的抗剪强度

4.2.1 概述

无粘性土包括粉砂、(细、中、粗)砂、砾、卵石和漂石等所有的粗粒土。

在剪切速度很慢的条件下,无粘性土的抗剪强度主要由滚(滑)动摩擦和咬合力所控制。因此,纯净的粗粒土是指未胶结、且含极少量或不含 $d < 0.1\text{mm}$ 的细颗粒的粗粒土,总的说来无凝聚力。

在无粘性土中,对砂土的抗剪强度的研究历史最悠久,成果最丰富,各种力学性质特征最显著,一般研究者均以砂为无粘性土为代表、本节亦以砂土的抗剪强度问题作为研究的重点。剪切过程中,砂粒有可能趋于定向排列,当然其影响远小于粘性土,尤其是由球状颗粒组成的均质砂(如建材标准砂)集合体,每颗粒粒径的长短轴相差不大,则更无显著的定向排列现象。砂土粒间表面力很小,总是由有效应力直接控制,若不考虑咬合力影响,则砂的水分会对颗粒表面滑动摩擦有影响,并出现微量的凝聚力。然而砂的有效内摩擦角只受有无水存在的轻微影响。至于剪切速度对砂土抗剪强度的影响,则也是很微小的。据泰勒(Taylor, D.W.)和卡萨格兰德(A. Kasagrande)的试验结果,剪切速度相差 10 000 倍,其抗剪强度只降低 10%。

砂土抗剪强度的研究简史如下:

早年一般认为:不同砂的有效内摩擦角的不同,其主要影响因素有下列几方面:

- 1) 压实状态,孔隙比 e 或相对密度 D_r 。
- 2) 颗粒的粗细,或粒径(指平均粒径 d_{50})。
- 3) 颗粒形状(圆度)和粒面粗糙程度。
- 4) 级配。

人们曾提出多种不同形式的图表公式,试图包罗万象地把各种因素都能定量地考虑进去,以给出工程中可实际应用的强度参数 ϕ' 值。然而各家研究的对象不同,总带有经验色彩,成果不统一。普遍认为:砂土的相对密度 D_r 或孔隙比 e 是影响其抗剪强度最主要的因素,而上述其他三项因素可综合地反映在 ϕ' — D_r 相关曲线上,变幅范围的宽度上,如图 4-1 (梅也霍夫(Meyerhof)提供)所示。

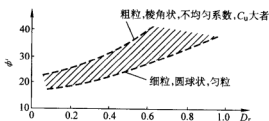


图 4-1

应特别注意,根据 1972 年在美国召开的国际相对密度学术讨论会上对比各家试验的结果表明: D_r 的测量误差可高达 $\pm 20\%$ 。其中,关键是砂的最小孔隙比 e_{\min} 测定的方法尚未完全统一,尤其是颗粒容易破碎的软质砂,试验方法影响 D_r 值极大。1981 年日本召开过“砂的相对密度与工程性质关系”学术讨论会,专门对此问题进行研讨。

20 世纪初中叶以后,轴对称三轴试验仪在各国普及,为砂土的抗剪强度的研究领域之扩大提供了物质条件。早期研究中偏重于不同密度砂的三轴不排水剪、固结不排水剪与排水剪成果对比上,例如从砂的固结不排水剪成果推演排水剪强度,有人致力于寻求初始孔隙比 e_0 与砂在不排水剪中破坏时孔隙水压力系数 A_f 的关系,以及初始孔隙比 e_0 及破坏时孔隙比 e_f 与有效内摩擦角 ϕ' 之间的关系等。但是,在工程实践中,只有呈透镜体埋藏的饱水砂土,在静动荷载作用下,上述研究才有实质性的意义,所以进展不大。20 世纪 60 年代开始,各国注意探索更复杂应力条件下砂土的抗剪强度问题,如:

- 1) 应力历史(应力路径)对抗剪强度的影响。
- 2) 中主应力 σ_2 对抗剪强度的影响。
- 3) 轴向应变与体应变 $\epsilon_u - \epsilon_v$ 的关系,即剪胀性的研究。
- 4) 高应力状态下砂的抗剪强度和砂颗粒的挤碎磨细作用。
- 5) 砂土各向异性与抗剪强度的关系。
- 6) 抗剪强度中各种因素(如滚、滑动摩擦、剪胀、颗粒挤碎磨细及定向化等)所占的地位和作用。用强度分量来表示它们,并试图将各部分分离出来。

20 世纪 60 年代末期以后,随着土的应力—应变—抗剪强度的统一本构理论的研究和迅速发展以及测试仪器和手段的日益进步,颗粒材料的抗剪强度已不作为单纯研讨的对象,而与其应力—应变关系混成一体,作为三“S”统一本构理论(三“S”即 Stress-Strain-Shearing Strength 应力—应变—抗剪强度)的一个组成部分出现。例如,剪胀现象不仅是一个变形问题(或应力—应变关系问题),砂土在剪切破坏前后都会发生剪胀,剪胀所耗散的部分能量所占比重较大,它直接影响到抗剪强度峰值大小及相应的破坏应变值。又如:组构分析(Fabric Analysis),颗粒材料的微观实验量测,各向异性性状研究,破坏标准选择,剪切常形成的分叉(Bifurcation)课题研究,中主应力 σ_2 的影响研究,剪切变形和剪胀中塑性功的研究,高压状态下砂土的特殊性研究等等,无不如此。下面就其中主要的几个问题作一些介绍和简单评述。

4.2.2 无粘性土剪切试验成果的一般规律

这里着重讨论三轴试验的成果,用 UU 表示不固结不排水剪;用 CU 表示固结不排水剪和用 CD 表示排水剪。除了专门研究特殊疏松的原状砂的单调荷载下液化势问题之外,对饱和砂土一般不进行 UU 试验,只研究 CU 和 CD 两种试验情况,其结果见图 4-2。

由图 4-2 大致可看出如下规律:

- 1) CD(固结排水剪切)试验中,松砂不出现强度峰值及其后的强度下降趋

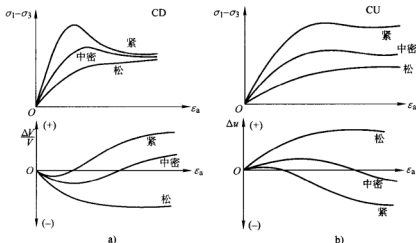


图 4-2

势，而体变 $\epsilon_v (= \Delta V/V)$ 一直保持正值，即只存在“剪缩”现象。紧砂则相反，虽然开始剪切时有微量的剪缩，但在不大的轴向应变 ϵ_a 时就转为剪胀，要到相当大的轴向应变 ϵ_1 时才趋于不胀不缩的等体积塑性流动状态。与此过程相应的，紧砂在较小的轴向应变时就出现明显的强度峰值，其后剪胀继续维持相当长的阶段，抗剪强度逐渐下降趋于稳值。中密砂的剪切和体变性状介于紧、松两种状态砂之间。

2) CU (固结不排水剪切) 试验中，松砂和中密砂一般没有强度峰值出现，或峰值后剪应力的下降量很微小。对极紧的砂，则因其具有明显的剪胀特性而可能会在其孔隙中出现过大的负孔隙水压力值而产生空穴 (Cavitation) 现象。原溶于孔隙水中的气体会逸出，甚至出现空泡，致使砂土体积产生一定的膨胀，并出现一定的强度峰值后剪应力自动下降的现象。CU 试验中孔隙水压力 Δu 的变化规律基本上与 CD 试验中的体变 $\epsilon_v (= \Delta V/V)$ 有一定的呼应关系。

3) CD 试验中，若压力室压力保持为恒定，即 $\sigma_3 = \text{常数}$ ，则无论砂土的初始孔隙比为多少，最终的剪应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 总会趋于一个大致稳定的值。与此同时，最终的孔隙比 e_f 也会趋于某一个大致稳定的值 $e_f = (e_0)_{cr}$ 。该值相应于某定值 σ_3 下的 CD 试验中砂土最终既不产生剪胀又不产生剪缩的情况。这一 $(e_0)_{cr}$ 值称为临界孔隙比。

还应指出：三轴压缩过程中，试样各部位的切应变和体应变并非均匀，上述临界孔隙比的概念，只适用于试样中段、不受或少受试样端部约束部位的情况。

4.2.3 无粘性土抗剪强度各部分分量剖析

从上一节的论述中可以看出：在 CD 试验中紧砂随着强度峰值的出现，必定有土样体积陡增现象伴随产生。因此，剪切所做的功必定有一部分能量被消耗在土的体积膨胀上，这部分强度分量称为“剪胀效应分量”，或简称“剪胀分量”。

同样，由 4.2.2 的第三点分析可知：相应于一定的 σ_3 值下，不管试样的初始孔隙比 e_0 为何值，在大变形剪切区内剪应力 ($\sigma_1 - \sigma_3$) 值最终趋于一致（大致的一致）。因此，当切应变相当大时，体变 $\varepsilon_v (= \Delta V/V)$ 基本上不再变化的条件下，砂的滑动摩擦决定了砂的稳定强度，这部分强度分量称为“滑动摩擦分量”，或简称为“摩擦分量”。

在三轴压力室室压 σ_3 较高的情况下，砂土剪切做功不仅要克服上述两部分分量的能量消耗，而且颗粒的挤碎磨细和砂颗粒的滚动和重新排列（包括剪破面上的颗粒定向化）都要付出一定的能量。颗粒的滚动和重新排列，以及重新定向化（reorientation），使形成较有利于剪切滑动的缓起伏面。这些因素综合起来组成第三部分强度分量，统称为“颗粒挤碎磨细和重新排列作用分量”。

于是，反映砂土强度的库仑公式

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi \quad (4-1)$$

中的内摩擦角 φ 应包括三部分分量，即

$$\varphi = \varphi_\mu + \varphi_D + \varphi_B \quad (4-2)$$

式中 φ_μ ——颗粒的滑动摩擦角，石英砂的 φ_μ 一般在 $30^\circ \sim 31^\circ$ 左右；

φ_D ——剪胀效应摩擦角分量；

φ_B ——颗粒挤碎磨细和重新排列作用的摩擦角分量。

在不同的室压 σ_3 条件下， φ_μ 基本上无变化，但 φ_D 和 φ_B 所起的作用就要产生变化。例如紧砂在较低的 σ_3 条件下，破坏时剪胀量很大， $\Delta V/V$ 为较大的负值，那么， φ_D 起的作用也就很显著，使所得的表观峰值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_p$ 较大，而峰后强度会降低。而在较大的 σ_3 条件下（如 $\sigma_3 > 5\text{MPa}$ 时），则无论是紧砂还是松砂，颗粒都会在剪切中被挤碎磨细。这样，一方面会削弱剪胀效应，使 φ_D 的作用和分量削弱；另一方面 φ_B 所起的作用却明显增大。最终结果是：在高围压 σ_3 条件下，紧砂与松砂的内摩擦角渐趋于接近。

4.2.4 砂土的剪胀和抗剪强度中体变能量校正

砂土受剪胀体积会不断变化，它对砂土的抗剪强度有直接影响。对此问题，1925 年太沙基 (Terzaghi) 和 1929 年雷德列奇 (Redlich) 早就注意到了。1936 年卡萨格兰德根据直剪试验中试样体变的定量试验，首次提出了所谓临界孔隙比的

概念,然而直剪试验土样内应力和应变场的分布极为复杂,不太可能精确测定 $d\epsilon_v/d\bar{\epsilon}$ ($d\bar{\epsilon}$ 为广义剪应变增量) 的数据。1976 年卡萨格兰德对周期荷载下单剪试验中砂样相对密实度 D_r 的不均匀分布作了测定 (图 4-3), 从中可看出中密砂经过第 1 次到第 25 次循环剪切后试样中 D_r (或含水率 w), 产生了重分布, 变化很大。

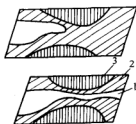


图 4-3

- 1— $D_r < 48.5\%$
2— $48.5 < D_r < 58.5\%$
3— $D_r > 58.5\%$

影响砂土剪胀性的因素很多: 剪切区土粒的级配、颗粒形状、装填的状态和方式、主应力作用面的方向、主应力比、应力历史及小主应力的绝对值等。因此, 试验仪器、试验操作步骤和方法、制备试样方法, 先期应力历史和应变历史等都影响剪胀性。早在 1948 年泰勒就已指出: 临界孔隙比 e_{cr} (剪胀剪缩的最终结果) 对一种给定的砂来说也不是一个稳定的常数, 而随试验步骤而变, 也会因对成果的解释不同而异。

砂土排水剪切过程中的剪胀 (缩) 现象是如何影响其抗剪强度的? 1948 年泰勒的回答是: 剪应力中有部分是为了使砂能在一定的法向应力 σ_n 作用下剪胀做功而消耗掉了。于是可将抗剪强度视为摩擦分量与体变分量两种因素的综合结果。后者也有称为咬合分量 (interlocking component)。他提出如下公式来计算剪胀能量修正

$$\tau_e = \sigma_n \frac{dh}{d\Delta} \quad (4-3)$$

式中 τ_e ——剪胀所需的剪应力;

σ_n ——法向应力;

$d\Delta$ ——剪切位移增量;

dh ——相应的试样厚度增量 (图 4-4)。

1954 年以后, 三轴压缩试验逐渐普及推广, 毕肖普 (Bishop) 对三轴试样的剪胀分量提出类似的公式 (图 4-5)

$$\sigma_e = \sigma_3 \frac{dv}{v d\epsilon_1} \quad (4-4)$$

式中 σ_e ——剪胀所需的剪应力 (以大小主应力差表示);

σ_3 ——围压 (即三轴室压力);

dv ——体积增量;

v ——土样体积;

$d\epsilon_1$ ——土样轴向应变增量。

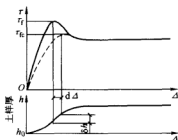


图 4-4

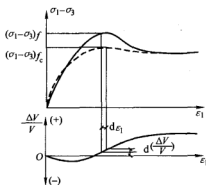


图 4-5

关键是要把这部分剪胀需要的抗剪强度分量分离出来。唯有这样才能确定其他发挥强度的因素所提供的抗剪强度分量。

令排水剪强度为 φ_d ，经过体变（即剪胀）校正后所得的修正值为 φ_{dc} ，则三轴压缩试验成果视其有无校正而用下列两种不同形式表达出来，即

$$\tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi_d}{2}\right) = \frac{1 + \sin \varphi_d}{1 - \sin \varphi_d} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_f \quad (4-5)$$

$$\tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi_{dc}}{2}\right) = \frac{1 + \sin \varphi_{dc}}{1 - \sin \varphi_{dc}} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \frac{dv}{v d\varepsilon_1}\right) \quad (4-6)$$

4.2.5 砂土颗粒挤碎磨细和重新排列对强度的影响

1962年罗威（Rowe）进一步研究发现，即使经过剪胀校正，式（4-6）中的 φ_{dc} 还是大于砂土的真正内摩擦角 φ_{μ} 。他认为其间的差值就是由于颗粒挤碎磨细、重新排列和定向也需要吸收一部能量所造成的。这是颗粒材料内部所吸收的能量，并已耗散殆尽，并不积聚，也不作外功，而泰勒和毕肖普等人的剪胀效应表达式仅仅考虑了土样体变过程中作外功所需的能量。显然，罗威的校正理论和方法无疑有利于探索高围压下砂土的抗剪强度规律，因为这种情况下必然伴随着砂粒的挤碎作用。

从图4-6可看出：围压 $\sigma_3 = 4.0\text{MPa}$ 作用下，颗粒的挤碎磨细现象已十分明显。如果原来的粒径级配曲线基本相同，那么，经剪切后的试样中，原来属棱角状颗粒的砂性

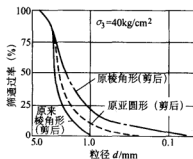


图 4-6

土，其挤碎磨细程度比原来是亚圆状颗粒组成的砂性土要严重得多。这证明了有棱角的颗粒之间接触点面积小，应力集中，易使颗粒压碎或磨去棱角，增加细粉成分。此外，砂土颗粒的材质和风化程度也有影响。软砂、风化砂都容易被挤碎磨细。

σ_3 越大，颗粒的挤碎磨细作用发挥得越显著。若某一砂土其初始孔隙比已给定（即相对密实度已给定），则当 σ_3 越大时，剪胀效应越不明显，甚至达一定 σ_3 以上后，剪胀转化为剪缩效应，这就是颗粒挤碎磨细效应的结果。

从宏观上看，砂土的表现内摩擦角 φ 总是随着三轴压力室压力 σ_3 增大而降低的，只是在 σ_3 较小（ $\sigma_3 < 4\text{MPa}$ ）的范围内，砂的剪胀效应才会明显地提高表现内摩擦角 φ 值。

魏西克（Vesic'）和克劳夫（clough）通过系统试验，得出紧砂与松砂在 σ_3 围压变幅较大范围内的抗剪强度包线形状，如图 4-7 所示。可从中清晰地看到，压力较小时，紧砂的表现 φ' 值可高达 $40^\circ \sim 45^\circ$ ，甚至达 60° 者，但当 σ_3 大到一定值（ σ'_B ）后， φ' 值会显著下降。而松砂则因剪胀效应不显著，而无论围压是大是小，表现 φ' 值一直接近 φ_μ 值。这表明两种状态的同一种砂，在较大围压的情况下，其抗剪强度包线趋于一致。

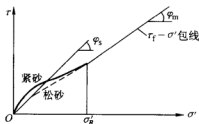


图 4-7

对于紧砂的这种抗剪强度 $\tau_f - \sigma'$ 包线严重非线性特征，如何确定有效内摩擦角 φ' 值十分困难。无论是分段找切线还是分段找割线以求不同围压下砂土的 φ' 都很不正确。魏西克和克劳夫建议用图 4-7 中包线上某一相应的 σ' 点连接坐标原点绘一割线，得割线角 φ_s 来表征砂土强度的非线性。 φ_s 的定义为

$$\varphi_s = \arcsin \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (4-7)$$

随着法向应力 σ_3 的增高， φ_s 渐降低并趋于稳定值 φ_μ ，见图 4-8。

φ_s 称之为有效强度割线角。为了归一化起见，也可绘制平均主应力 $p - \varphi_s$ 关系曲线。应该指出，采用 φ_s 表达方式来研究高压状态下不同初始孔隙比砂土的抗剪强度包线非线性特征虽有其优点，但工程应用中仍不普遍。

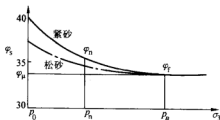


图 4-8

由以上分析知试验室实测的砂土抗剪强度应由滑动摩擦、剪胀效应、

颗粒挤碎磨细和重新排列定向效应等三个方面因素提供的强度分量所组成。对照式 (4-2), 砂土在不同法向应力 σ 下的抵抗剪切破坏的阻力 τ_f 之分解和合成可按图进行。先由高法向应力段的 τ_f — σ 曲线斜率确定强度的滑动摩擦分量 φ_μ 。在此基础上先作颗粒挤碎磨细和重新排列定向效应的校正。然后再作剪胀效应的校正。这种分解和合成的表达方式和顺序比较合理, 因为 φ_μ 最稳定且最易精确确定, 而 φ_B 分量还决定了剪胀分量 φ_D 的量值大小和正负。图 4-9 中 I 表示 φ_μ , II 表示 φ_B 和 III 表示 φ_D , 因此最终的抗剪强度包线为由 I + II + III 所组成。

若以砂的初始孔隙率 n_0 (或初始相对密度 D_{r0}) 为横坐标, φ' 为纵坐标, 则从 n_0 — φ' 关系曲线上也了解不同紧密度的砂土中三部分强度分量各占的比例 (图 4-10)。该图表示在法向应力 σ 值较低的条件下的规律。

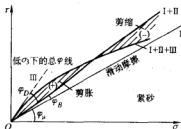


图 4-9

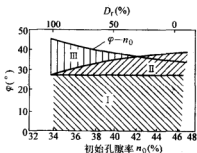


图 4-10

关于 φ' 与剪切时体变速率关系的研究, 早在 1948 年泰勒等人就开始了, 但是由于对颗粒挤碎磨细耗能部分认识不足, 故在一般计算中常被忽略, 以致对高压下砂的剪胀所提供的强度分量估计过高, 或者是推估的摩擦强度分量过高。只有在 φ_B 分量被揭示之后, 才能够纠正原来的错误认识。

在高的围压 σ_3 作用下, 本来有的砂粒就可能被挤碎, 产生一定的体积压缩, 但经剪切, 就有更多的土粒或土粒的棱角部位会被研成碎屑或造成粉末, 以致体积进一步缩小, 此所谓剪缩。图 4-11 表示这一过程的结果。不过应注意: 在很小的围压下 (如 0.3MPa 以下), 剪切破坏时仍可能产生一定的净剪胀, 见图 4-11 中的 A 点以左部分虚线; 就是颗粒挤碎磨细效应不明显的缘故。

毕肖普发现, 无论围压 σ_3 为多大, 整理抗剪强度与破坏时体变的

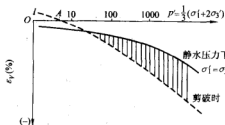


图 4-11

关系 $\varphi' - (d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_f$, 可得一条很好的直线。这正好反映了随着 σ'_3 的增加, 剪胀速度就降低了。 φ' 大者, 相应于破坏时的剪胀 $(d\varepsilon_v/d\varepsilon_1)_f$ 也大 (图 4-12)。这又正好反映强度中剪胀分量项数值上是与剪胀成正比, 他还指出: 既然三轴室围压对 φ' 和体变的影响有其特殊的作用, 所以在工程设计时绝不能轻易地采用低围压试验成果任意外插推演高压状态下砂土的强度和应力—应变关系。

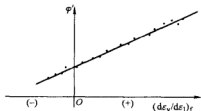


图 4-12

20 世纪 60~70 年代间, 许多学者致力于研究静荷载作用下砂的相对密度 D_r 和围压 σ_3 对固结不排水剪试验中砂性状的影 响。1971 年毕肖普得出了松砂在中等至高围压 σ_3 值条件下不排水剪切强度与固结应力 p'_0 之比 $C_u/p'_0 \approx 0.2 \pm 0.1$ 这样低值的实测成果, 说明松砂不排水强度很低, 并表现为有显著的应变软化现象。这结论对松砂在不易排水的条件下 (如透镜体埋藏条件) 受剪乃至受动荷载作用时的性状研究都有着十分重要的实践意义。偏松的砂, 不排水剪应力—应变关系曲线可能出现双峰值。很松的砂则应变软化现象特别严重, 与高灵敏性粘土者十分相似。其有效应力路径也呈现各种特殊规律, 见图 4-13。

由此可见, 对于饱和松砂体, 应注意冲击荷载或单调加载下的不排水受剪试验中, 砂土的原有结构会产生破坏而导致液化。在围压 σ_3 较高条件下的不排水剪中, 某些松砂原有结构不均匀性显著, 存在尺寸较大的孔隙, 在其未受剪前孔隙比较大, 固结使超静孔隙水压力降为零。但一旦受剪后孔隙水压力 Δu 激增, 其有效应力路径类似于饱和灵敏粘土的情况。相应于最大应力差 $(\sigma'_1 - \sigma'_3)_{\max}$ 强度取值标准的 φ' 值相当低 (据毕肖普研究结果, 英国 Ham 河河砂的 φ' 值仅为 21.3° , 还有低于 20° 者)。高土石坝下的软基中可能埋藏有松砂

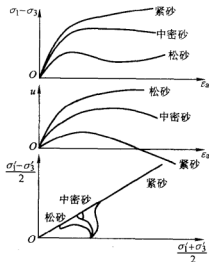


图 4-13

透镜体, 必须密切注意它们是否可能有在不排水剪切下失稳的危险性存在。此外, 对高围压条件下的饱和砂性填料也一定要尽量压实得很紧为好, 因为所有的砂性填料其初始的组构和结构往往都是不均匀的和不稳定的, 必须充分压实以消除大孔隙。

4.2.6 关于颗粒材料强度的各向异性问题

根据传统研究的结果,一般认为各向异性性质对颗粒材料 (Granular material, 如砂土) 的强度参数 ϕ' 影响似乎不大。特别是以最大应力比 $(\sigma'_1/\sigma'_3)_{\max}$ 作为破坏取值标准时更是如此,只是它对砂土的变形模量影响颇大,可能会相差一倍以上。但是,在研究颗粒材料的屈服问题或采用其他强度指标的取值标准(如以 $(\sigma'_1 - \sigma'_3)_{\max}$ 为取值标准)时,仍不能忽视材料各向异性的影响。1965年约翰逊(Johanson)指出:几乎所有的天然砂砾沉积都具有各向异性结构特征。更多的研究者在室内做三轴剪切试验(或平面剪切或真三轴剪切试验)中,发现用水注入砂粒法或“砂雨”法(Sand Rain法,即在空气中均匀抛洒干砂粒)所制备的试样,一般也都具有各向异性性质。一个简单验证各向异性及其方向性的办法,就是作一次圆柱试样的等向压力压缩试验,比较实测轴向应变 ϵ_1 与体应变 ϵ_v 的关系。若 $\epsilon_v = 3\epsilon_1$,则表示该砂样具有各向同性(根据广义胡克定律知),否则就是各向异性体。对于轴对称三轴压缩试验的具体变形条件而言,它可称为正交各向异性体(cross-anisotropical body)或横观各向同性体(transverse isotropical body)。日本东京大学用原状的 Niigata 砂作室内三轴等向压力固结试验,结果发现了 $\epsilon_v = 5.8\epsilon_1$ 。这说明试样的水平向压缩变形大于竖向。

颗粒材料的各向异性分两种类型:

1) 原有的各向异性 (inherent anisotropy), 也可称原生的、生成的或固有的各向异性。

2) 应力诱致的各向异性是由颗粒材料集合体在工程中新的荷载所引起的各向异性。

原位砂层中原有的各向异性是由颗粒材料集合体形成过程中现场沉积或冲填方式所决定的,也应把存在于漫长地质历史中应力历史的影响归结到“原有的各向异性”成因中去,以区别于工程中荷载所引起的应力诱致各向异性,原有各向异性结构直接影响到土的应力—应变关系和抗剪强度,对后者的影响主要表现在峰值强度 $(\sigma'_1 - \sigma'_3)_{\max}$ 和破坏时轴向破坏应变值 ϵ_{11} 上。原有的各向异性之成因,其关键在于天然的沉积砂和实验室中人工制备的试样都是在重力作用下形成的。由于颗粒沉积时有一种倾向,即颗粒的长轴总与沉积时的水平面——层面相平行,所以颗粒排列上的定向性总导致砂土宏观力学性质上的各向异性。即使是空气中均匀抛洒的砂雨法也同样的会得到相类似的各向异性性质。这个具有重大实际意义的研究课题,自20世纪40年代以来颇受岩土力学界和理论与应用力学界的重视。有的专家着重对颗粒介质的组构和矿物成分对砂土各向异性的影响作了分析;有的将砂样制备方向引起的各向异性与液化势之间作了建立联系的尝试,有的则用平面应变试验研究了砂土的各向异性强度问题,它要比轴对称三轴试验优

越多。

4.2.7 剪切带的形成及其对土的应力—应变—强度特性的影响

在土的抗剪强度试验中,无论用何种测试仪器和手段,都可能出现两种迥然不同的剪切破坏形式:一种是试样内沿一定(一个或数个)平面上形式范围较窄的剪切破坏带(简称剪切带, shear band),在此剪切带范围内土颗粒之间产生非连续的巨大相对位移,而该范围之外的土则处在相对静止的状态;另一种破坏形式是试样整体地或较宽范围内土体产生较为均匀的剪切变形,而不出现变形颇为集中的剪切带。前者可称为线状破坏(line failure),后者可称为区状破坏(zone failure)图4-14。在何种边界条件下,又在多大的剪切应变量情况下,出现何种形式的破坏问题是一个十分复杂的难题。20多年来,一些研究者(如瓦尔杜拉基斯, Vardoulakis, 1980)将这类问题归结到“分叉理论”中去。分叉理论(Bifurcation theory)在本领域内的应用就是颗粒材料集合体内部受剪切作用后剪切带形成和发展规律的研究。对于压延性金属材料等,分叉理论受到高度重视,被看成一个力学分支。但对由颗粒材料构成的土体来说,似乎更是抗剪强度理论中一个带有根本性的研究课题。

对于砂性土这类颗粒材料来说,工程中土体破坏主要呈现为剪切带的形式。例如砂质土土坝边坡的滑塌,更呈平面状态的剪切带破坏;紧砂地基的整体剪切破坏(general shear failure)则呈曲面滑动形式。室内试验也证明了:无论三轴剪切、平面应变剪切、直剪、单剪、环式单剪或扭剪等,形成剪切带的破坏形式出现的机率也比较多。近年来,国内外对土力学中分叉理论的探索作了不少努力。阐明了一些剪切带形成的机理,并逐渐致力于研究剪切带方向、宽度和长度等参数的确定。此外,也有人探索出砂土结构的不均匀性是剪切带形成的诱因之一。土体变形的数值计算问题若遇到了剪切带的形成,则传统的连续介质的各种数值计算手段在处理非连续性问题中将产生巨大困难。再者,室内试验成果表明:有无剪切带形成对土的应力—应变—强度本构特性影响极大。下面将着重讨论剪切带对颗粒材料抗剪强度的影响问题。

1. 剪切带问题的研究历史概况

早期在直剪试验中,有许多研究者曾用染色物在砂样中划上条纹记号,剪切后再剖开土样断面,观察试样内部各点相对位移。检验有无明显的中心部位的水平剪切面,还是出现异常的倾斜剪切带,这种简单技术一直沿用至今,特别在实

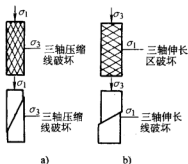


图 4-14

实验室砂槽内进行缩尺模型试验中发挥着重要作用。1978 武汉水利电力学院与武汉煤矿设计院联手进行过煤的大型叠环式单剪试验，也曾采用过类似的量测技术。试样破坏后剖开断面发现剪切带倾斜度很大，且不止一条剪切带，图 4-15 所示。

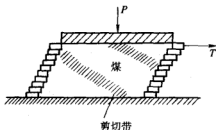


图 4-15

1960 年后，英国剑桥大学首次用 X 射线技术研究小型砂槽中土体的位移轨迹和体变规律。这种技术可探测试样中初始密度分布的均匀程度以及在外荷作用下密度的变化趋势，再配合理入的铅弹位移的观测，就可把剪应变与体应变的微妙对应关系找出来。1980 年伍德 (wood) 等将此技术用于单剪试验；1975 年布朗斯贝 (Bransby) 将此用于挡土墙模型试验。以上两类试验中都发现了有较狭窄的密度降低区产生，而且它是随着应变的增大而逐渐发展伸长的。这种优先剪胀的狭长弱化区域当时称之为破坏层 (Rupture zone)，实际上它就是剪切带 (Shear band)，它标志着该区域内砂发生剧烈的相对位移，而砂土的剪切位移必然伴随产生相应的剪胀体变。较多的研究者认为：破坏面（即剪切带）的形式必然受到砂土体的某些条件约束的严重影响。这些约束条件有：单剪试验中试样厚度与粒径的比例关系、上下边界的摩擦系数、上下边界能否作竖向的移动等。三轴试验中试样的端部约束等的影响更加明显。

20 世纪 80 年代初英国伦敦大学的研究工作着重在剪切带具有方向性特征问题上。并得出它对土的应力—应变—强度特征有重大影响的结论。揭示了剪切带范围内颗粒空间孔隙比率先局部地有明显增加，从而导致带内砂土强度的降低，造成了相对薄弱的部位，反过来又促使剪切带逐步发展起来的工作机理。并得出了“大小主应力方向的基本恒定是产生剪切带的必要条件”这一著名结论。在循环荷载的平面剪切试验中不可能发现有剪切带的开展，因为大小主应力方向一直在交替更换着或者大小主应力轴方向的连续转动都会阻止变形着的砂土体单元中剪切带的形成。

1982 年国际理论和应用力学协会 (IUTAM) 在荷兰代尔夫特召开的“颗粒材料的变形与破坏”学术讨论会中主要探索了剪切带形成机理、剪切带的方向性、三轴试验中端部约束对分叉课题的影响、剪切带形成对土的抗剪强度和应力—应变关系的影响，以及试样（或现场土体）内部原有的软弱包裹体的存在对剪切带形成的作用问题等。该次学术会议大大推动了颗粒材料剪切带问题研究的发展。

2. 产生剪切带可能性的判据

归纳各家的成果，可以断定判别剪切带破坏是否可能产生的重要依据至少有下列三点：

第一，对于均匀材料来说，剪切带破坏必定要在具剪胀性的颗粒介质中才能形成，因此松砂剪切试验一般不会产生剪切带。

第二，材料初始的不均匀程度越大，产生剪切带破坏的可能性也越大，因此含有较多超径颗粒的砂性土容易产生剪切带破坏。

第三，不管产生剪切带破坏（线状破坏）还是整体塑性破坏（区状破坏），总要产生较高的内部能量耗散率。这种耗散率在哪一种破坏形式中比较高，就易产生哪种破坏。

拉德（Lade）还强调边界条件的重要性。如果边界条件使试样的应变更加均匀，则容易产生区状破坏而不出现剪切带破坏。

3. 剪切带形成与三轴剪切试验成果的判释

众所周知，只有发生试样整体性大变形的区状破坏，三轴试验中实测的体应变和剪应变才能代表全试样的平均值。所以通常概念中的砂土本构关系必须从区状破坏的试验中获得。为达此目的，必须要有刚性的、光滑平整的表面作为试样上下两端部边界，使试样应变更为均匀。

然而，实际试验中即使在端部约束十分小的条件下，试样在变形中还是可能发展严重的不均匀性，使易于形成剪切带，从而对砂土的应力—应变—强度关系以及砂的体变特征都有很显著的影响。

上述的试样原有的不均匀性和端部约束这两个因素基本上控制着三轴试验的两种破坏类型的分叉。以某砂为例，进行了系统的对比试验，其成果集中综合在图 4-16 中。从图 4-16 可以看出如下几点规律：

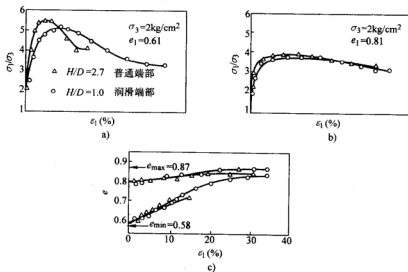


图 4-16

1) 对于紧砂, 无润滑即有约束端部的试样易产生剪切带破坏(即线状破坏)而且破坏应变很小, 这是由于试样的大部分变形仅集中在较窄的范围内。而其余部分土体则在破坏时只产生很小的变形。有润滑端部的紧砂试样常表现为区状破坏, 且是渐进性的破坏, 破坏应变很大(ϵ_{11} 达30%以上)。其原因是整个试样都处于较均匀的变形之中。

线状破坏试样的强度显然大于区状破坏者。因为线状破坏试样的两端受约束等于对整个试样受到较大的 σ_3 约束, 所以强度就大些, 使 φ' 值峰值提高 $\pm 2^\circ$, 如图4-16a所示。

2) 对于松砂, 因其易于压缩, 故水平向侧胀较小, 结果是端部有无侧限对松砂试验的应力—应变—强度的关系都很小, 如图4-16b所示。

3) 至于剪切中体变规律, 理论上认为区状破坏试样的体变速率要高一些, 其理由是认为这种砂样的大部分体积都产生大应变。其实不然, 图4-16c表示, 最大剪胀率, 即体应变—轴向应变($\epsilon_v - \epsilon_1$ 或 $de - \epsilon_1$)曲线斜率在两种破坏情况下几乎完全一样。因此可以认为破坏时的剪胀率与砂的破坏形态基本上没有太大关系。

4) 两种破坏情况下最终的孔隙比变化不完全相同。区状破坏的紧砂试样的剪胀要到轴应变 ϵ_1 达 $\pm 35\%$ 时才停止, 而线状破坏者在 $\epsilon_1 = \pm 12\%$ 时即已停止。因此前者在大应变时相应的平均孔隙比要比线状破坏者大得多, 且与临界孔隙比 e_{cr} 接近。

4.2.8 中主应力对砂土抗剪强度的影响

对本问题的研究, 早期多限于轴对称三轴压缩和拉伸两种试验成果的比较。后来, 随着真三轴($\sigma'_1 > \sigma'_2 > \sigma'_3$ 应力条件)试验仪器的发展逐渐深化。有的在平面应变双轴剪切仪中进行研究, 只是测定 σ'_2 的发展变化过程, 也可提供一部分成果资料。总的来说, 此项研究旨在探讨在复杂的应力条件下土达到破坏, 其内摩擦角 φ' 是否不变。

众所周知, 在平面条件下剪切, 若按照一般常规轴对称三轴试验成果整理方法求取 $((\sigma'_1 + \sigma'_3)/2 - (\sigma'_1 - \sigma'_3)/2)$ 应力坐标上的砂土 α 角, 再按 $\varphi' = \arcsin(\tan \alpha)$ 换算成 φ' 角就得比常规三轴所得的要高。对于紧砂更是如此, 如图4-17所示。这就是 σ'_2 对抗剪强度的影响所致。

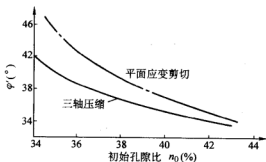


图 4-17

应该指出：此项研究各家至今对此尚未取得一致的看法。有的认为 φ' 随应力条件而异，有的则认为 φ' 是常数，以致各家坚持各自推荐的强度破坏准则。这种争论现象产生的原因，主要是：试样破坏标准选择不统一；破坏形态不同的干扰和计算破坏应力的方法不统一。

4.3 粘性土的抗剪强度

4.3.1 用有效应原理与应力路径概念研究粘性土抗剪强度的统一性

为了叙述清晰起见，我们从一种理想的正常固结粘土入手。这种土的试样是将土粉制备成含水率为液限的土膏 ($w = w_L$)，然后置入三轴试样圆柱形橡胶膜中进行加压，做等向固结。在不同固结压力 σ_c 下固结完成后进行 CD 剪切试验。也可在某一 σ_c 下固结完成后卸除围压，并减至不同的 σ_3 时，再作 CD 剪切。

由图 4-18 可看出：

1) $w = w_L$ 时，土膏尚未受荷固结，强度假定近似地视为等于零。随着固结发展， w 下降，孔隙比也下降，强度增加（见图 4-18 中 a 、 b 、 c 三点，它们分别表示不同固结压力下的情况）。

2) 只有正常固结粘土，不排水强度与固结压力 ($c_u - \sigma_c$) 关系才是通过原点的一条直线，而且破坏时孔隙水压力系数 A_f 也基本保持恒定。

3) \vec{bd} 段表示试样由固结压力 σ_c 固结完后卸荷，土稍有膨胀，但强度 c_u 要比正常固结段提高（比较相同围压 σ_3 下的 a 、 b 两点），反映超固结的作用。在 $c_u - \sigma$ 图上 \vec{bd} 微曲向上凸；在 $A_f - \sigma$ 图上是 \vec{bd} 为斜向左下方的直线，达到 d 点之后，再降低 σ_3 ， A_f 就出现负值，表示严重超固结土的明显剪胀特征。

4) 不排水强度 c_u 的实质是破坏时偏应力之半 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f/2$ 。

通常，地基中取出的土样，历史上总受过一定的固结压力，且曾产生过固结的过程。因此，对它作 CU 试验，其成果随所施的围压 σ_3 大小而异。在等向固结试验中也可确定其先期固结压力 σ_c 。 σ_c 与 p_0 的概念略有不同。 p_0 是土在天然沉积条件下处于 K_0 状态的先期固结竖向压力，而 σ_c 则是在试样等向固结中所反

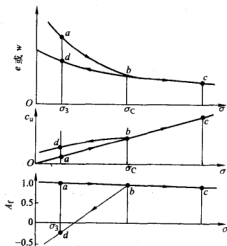


图 4-18

映出来的先期固结等向压缩,两者数值并不相等,但很接近,工程中为了试验简化起见,一般将两者等同起来,这是允许的。

如将这种原状土的 CU 试验成果按上述方法表达出来,则也可得 $\tau-\sigma$ 图上一条折曲线,它由 db (微曲向上凹,为再压曲线) 和 bc 直线 (正常固结段) 组成。

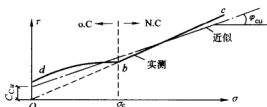


图 4-19

一般工程中 (包括有的教材) 将测点笼统地描述为一条直线, 求取 c_{cu} 、 φ_{cu} 指标和推算出 c' 、 φ' 指标, 是一种十分粗糙的近似 (图 4-19)。特别应该注意: CU 试验中各土样的孔隙比 (或含水率 w) 各不相同。

在此基础上, 试用有效应力原理与应力路径概念来分析粘性土的抗剪强度各种指标之间的关系。

1. 理想化正常固结土的 CU 试验成果分析

所谓理想化就是指由液限制备的粘土, 未施荷时其强度可视为零。对它们进行不同 σ_c 下的 CU 试验, 同时测定 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ (轴向应变) 和 $u - \varepsilon_{1a}$ 过程。于是可得有效应力和总应力两条强度包线, 可同时求出 c_{cu} 、 φ_{cu} 和 c' 、 φ' 两组指标。对这种土 c_{cu} 和 c' 都近似地等于零 (图 4-20)。

现试求其 CD 试验中 A_f 、 Δu_f (破坏时孔隙水压力)、 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f/2$ 、 φ' 和 φ_{cu} 等值之间数量上的关系。这最好求助于应力路径分析法, 一般在 $(\sigma_1 + \sigma_3)/2 \sim (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 的应力坐标上进行研究 (图 4-21)。

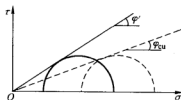


图 4-20

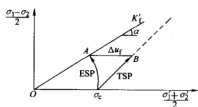


图 4-21

TSP—总应力路径 ESP—有效应力路径

对饱和粘, 斯开普顿 (Skempton) 孔隙水压力公式为

$$\Delta u = \Delta \sigma_3 + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) \quad (4-8)$$

常规三轴 CU 试样中 $\Delta \sigma_3 = 0$, $\Delta \sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_3$

$$A = \frac{\Delta u}{\sigma_1 - \sigma_3}; \Delta u = 2A \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \quad (4-9)$$

由图 4-21 中 σ_c 出发点的移动轨迹——即 ESP 曲线状态是表达式 (4-9) 的含义。它表明孔隙水压力系数 A 值随 ϵ_1 增加而不断变化, 这种正常固结土的 A 则是逐渐增加的, A_f 值为最大。若 ESP 假定为直线, 则利用几何关系可推出 $A = A_f + \text{常数}$ 的结论, 然而实际土并非若此。

当土达破坏时

$$\Delta u_f = 2A_f \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_f \quad (4-10)$$

这时 ESP 交破坏线 K_f 于 A 点, 其坐标为

$$\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2 \tan \alpha} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2 \sin \varphi'} \quad (4-11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} &= \sigma_c + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} - 2A \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \\ &= \sigma_c + (1 - 2A) \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \end{aligned} \quad (4-12)$$

将式(4-11)代入式(4-12)得

$$\frac{1/2(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{\sigma_c} = \frac{1}{\cot \alpha - (1 - 2A_f)} = \frac{\sin \varphi'}{1 + \sin \varphi' (2A_f - 1)} \quad (4-13)$$

实践证明, 许多饱和和重塑正常固结粘土的 ESP 几何形状并不随 σ_c 之不同而有何变化, 只是其几何尺寸随 σ_c 增大而成比例地增大 (图 4-22)。因此, 不同 σ_c 所作 CU 试验结果, A_f 值十分稳定, 斯开普顿早已对此作了结论。这样, 必可推定

$$\frac{1/2(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{\sigma_c} = \text{常数} \quad (4-14)$$

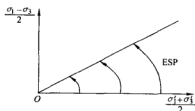


图 4-22

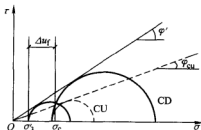


图 4-23

上述关系,用一般的莫尔应力圆照样可以推导而得,如图 4-23 所示。图中虚线表示总应力,实线表示有效应力。如在同一 σ_c 下固结的两个试样,一个做 CU 试验至破坏得虚线破坏应力圆,并由之绘出总应力包线(虚直线)。另外一个试样做 CD 试验,则可得图中较大的有效应力破坏圆,由此绘出有效应力包线(实直线)。由 CU 的虚圆经过 Δu_f 的校正也可得有效应力圆,它必相切于上述有效应力包线。从该图中几何关系可知

$$\begin{aligned}\sin \varphi' &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} \left/ \left[\sigma'_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} \right] \right. \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} \left/ \left[\sigma_c - \Delta u_f + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} \right] \right. \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} \left/ \left[\sigma_c - (2A_f - 1) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} \right] \right. \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2\sigma_c} \\ &= \frac{\sin \varphi'}{1 + (2A_f - 1) \sin \varphi'}\end{aligned}\quad (4-15)$$

因此,证明了两种推导方法得相同结果。对照图 4-23 中的各种几何关系还可求取理想正常固结粘土的 φ' — φ_{cu} 间的关系,即

$$\begin{aligned}\frac{\sin \varphi'}{1 + (2A_f - 1) \sin \varphi'} &= \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{\sigma_c} = \frac{\sin \varphi_{cu}}{1 - \sin \varphi_{cu}} \\ \sin \varphi_{cu} &= \frac{\sin \varphi'}{1 + 2A_f \sin \varphi'}\end{aligned}\quad (4-16)$$

这进一步说明了,正常固结粘土 A_f 值只要是比较稳定的话, φ' 与 φ_{cu} 两大参数就可以互推。

2. 理想正常固结粘土的 UU 试验成果分析

UU 试验过程中始终保持着土原来的含水率 w 。只要 w 不变,土的不排水强度不变。实际上,对正常固结土,任一 w 都对应于一定的固结压力 σ_c ,即 w — σ_c 有单一对应关系。试验证明 w — c_u 也有这样的关系: w 一定, c_u 也一定。不管室内 σ_3 为何值, UU 试验中不排水, σ' 不变。这就为伦杜列克、内亨克尔 (Rendulic, Henkel) 等人建立 w — σ' — c_u 单一对应关系理论打下了基础。

如图 4-18,土的应力历史在 a 、 d 和 b 三点上不同, w 也不同,若对这三种情况的试样分别施加多种 σ_3 围压,但不允许它固结排水,都是做 UU 试验,其结果如图 4-24 所示。

已知: $w_a > w_d > w_b$;

由上图: $c_{ua} < c_{ud} < c_{ub}$ 。可知两两相互对应。而且不管 σ_3 为何值, 同一 w 的土可得半径相同而位置不同的破坏应力圆 (总应力)。对于正常固结土 (如 a 、 b 两点), 若 UU 试验中精确测定孔隙水压力 u , 经过校正, 则不管破坏时总应力圆位置如何, 破坏时有效应力圆却总是具有固定的位置, 如图 4-25 所示。

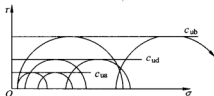


图 4-24

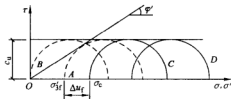


图 4-25

从 CU 试验的理论分析知: 一定的含水率 w 相应于一定的固结压力 σ_c 。对该土进行不排水剪 (CU) 试验时, 试样达破坏产生 Δu_f , 而 $\sigma'_{3f} = \sigma_c - \Delta u_f$ 所表示的应力圆就是有效应力破坏圆 A。前述 CD 试验结果仍得同一个圆。根据大量试验表明, 对同一 w 的土施加任意 σ_3 进行 UU 试验还是得到这个圆。因此该圆必与有效应力强度包线相切。图 4-25 中 B 圆表示无侧限抗压强度试验成果。有人测定它破坏时 Δu_f 为负值, 大小等于 $-\sigma'_{3f}$, 依然验证了这一点。因此, 可按下列步骤推导 $c_u - \sigma'_{3f}$ 关系

$$\begin{aligned}\sin\varphi' &= \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{(\sigma'_1 + \sigma'_3)_f} \\ \sigma'_{3f} &= \frac{(\sigma'_1 + \sigma'_3)_f}{2} - \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{2} = \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{2} \left(\frac{1}{\sin\varphi'} - 1 \right) \\ \sigma'_{3f} &= \frac{c_u(1 - \sin\varphi')}{\sin\varphi'}\end{aligned}\quad (4-17)$$

结论是: 理想的正常固结粘土 UU 试验中有效应力破坏圆的位置是固定的。而 $\sigma'_{3f} - c_u$ 的关系单一地由 φ' 所确定。

3. 理想正常固结粘土的 CD 试验成果分析

CD 试验中, $\Delta u_f = 0$, 所有的应力都是有效的。有效应力路径 (ESP) 与总应力路径 (TSP) 完全一致。从图 4-26 可知

$$\frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f/2}{\sigma_c + (\sigma'_1 - \sigma'_3)_f/2} = \sin\varphi'$$

$$\frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{2} = \sigma_c \frac{\sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \quad (4-18)$$

1960年亨克尔 (Henkel) 进一步作了系统分析, 他将试验成果表达在一个新的应力平面中 (Rendulic 平面, 图 4-28a 中的 $Olmn$ 平面), 发现正常固结粘土的 CD 和 CU 试验的有效应力强度包线是统一的。他继而考察到 CU 试验的 ESP 路径形状与 CD 试验成果整理所得的等 w 线的形状不仅相似, 而且 w 与有效应力也是互相对应的。

图 4-28b 中 Om 线为各向等压固结的应力路径, 若试样在某一 σ_3 下固结, 可得 a 点, 然后做 CU 试验得 ESP 为 aa' 线, 它对应于某一较大的 w 。而在较大的 σ_3 下固结, 可得 b 点。同样 CU 试验得 ESP 为 bb' 线, 它对应于某一较小的 w 。 aa' 与 bb' 形状相似, 大小不同。

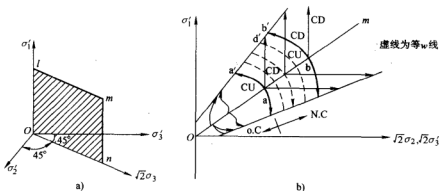


图 4-28

若土样在 a 点固结后, 做 CD 试验, Δu 一直为零, 但体积随剪应力的增加而递减, 这正是正常固结土特征。CD 试验的 TSP 与 ESP 相重合, 由 ad' 线表示, 其上可标出相应于不同应力下的 w 。对不同固结压力下固结的土做 CD 试验, 又可绘出类似的 ESP。这样就可绘制 CD 试验的 w 等值线见图 4-28b 中的虚线簇, 它们的形状与 aa' 和 bb' 线不仅相似, 而且含水率互相内插得十分准确。这种关系使从 CU 试验成果去预测 CD 试验中 w 的变化规律成为可能。反之, 也可由 CD 成果预测 CU 试验中有效应力和 Δu 的变化规律。由此可得如下结论: 正常固结粘土在破坏时, 有效应力与 w 间存在单一关系, 不排水强度与 w 间也有单一关系。Rendulic 和 Henkel 等人的这种发现为以后建立正常固结粘土的弹塑性模型打下了基础。

4.3.2 超固结土 CU 试验成果分析

现先比较正常固结粘土与超固结粘土在同下围压 σ_3 下进行 CU 试验时实测的 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 、 u 、 A 三者与 ϵ_1 的关系 (图 4-29)。

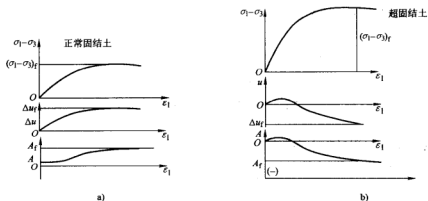


图 4-29

正常固结粘土（即图 4-18 中的 a 点）有剪缩趋势，故随 ε_1 增加而 Δu 和 A 都逐渐增大，破坏时达 Δu_f 和 A_f ，而且 A_f 比较稳定。

超固结粘土（即图 4-18 中的 d 点）有剪胀趋势。 ε_1 值较小时，孔隙水压力微有上升，而 ε_1 稍大时， Δu 就变为负值，相应地， A 值从开始的某一较小正值，一直下降，很快变为负值。破坏时，两者分别达到 $-\Delta u_f$ 和 A_f 最大负值。土的超固结比（OCR）越大， A_f 的负值越大。

为了区别超固结程度不同的影响，绘制图 4-30。其中 a 图为轻超固结粘土情况中 ESP 的表达式，达到破坏时 $\Delta u_f > 0$ ， $A_f > 0$ （对 OCR = 2）。图 4-30b 为严重超固结土的情况， $\Delta u_f < 0$ ， $A_f < 0$ （对 OCR = 6 时）。

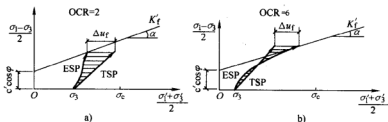


图 4-30

超固结土的破坏包线已不通过坐标原点，它在纵坐标上的截距 $a = c' \cos \varphi'$ 其斜率 $\tan \alpha = \sin \varphi'$ 。按上述方法可推出超固结粘土的各参数间关系式

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_2)_f = \frac{c' \cos \varphi' + \sigma_c \sin \varphi'}{1 + (2A_f - 1) \sin \varphi'} \quad (4-19)$$

在莫尔应力圆上, 照样可以推得式 (4-19)。利用图 4-27 中的几何关系还可得到总应力参数之间的关系式

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f = \frac{c_u \cos \varphi_{cu} + \sigma_0 \sin \varphi_{cu}}{1 - \sin \varphi_{cu}} \quad (4-20)$$

但应注意, 超固结的 φ' 值已不等于正常固结粘土那种通过原点的有效强度包线的 φ' 了。对照图 4-27 中超固结区和正常区中两条有效应力强度包线的形状, 可见其特征。

一般地基在沉积过程中和固结历史过程中, 其土处于 K_0 状态下, 只产生单向固结, 与上述各向等压固结有所不同。研究 K_0 条件下固结土的不排水强度 c_u 与竖向固结压力 σ_c 间的关系更符合实际。

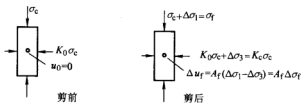


图 4-31

室内试验也是按模拟 K_0 状态的方式进行的, 如图 4-31 所示。

剪前主应力差为: $\sigma_c - K_0 \sigma_c = \sigma_c (1 - K_0)$

设 $\Delta \sigma_3$ 。即室压 $K_0 \sigma_c$ 保持不变, 破坏主应力差变为

$$(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_f = \sigma_c (1 + K_0) + \Delta_f (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4-21)$$

式中 $\Delta_f (\sigma_1 - \sigma_3)$ 表示由 K_0 固结至破坏时的主应力差增量。可由图 4-32a 莫尔应力圆或图 4-32b 应力路径分析图中看出这些关系。

因 $c_u = (\sigma'_1 - \sigma'_3)_f / 2$, 又从式 (4-17), 可得有效应力破坏条件为

$$\frac{1/2(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{\sigma'_{3f}} = \frac{\sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \quad (4-22)$$

而 $\sigma'_{3f} = K_0 \sigma_c - \Delta \sigma_3 - \Delta u$, 因已设 $\Delta \sigma_3 = 0$, 则

$$\sigma'_{3f} = K_0 \sigma_0 - A_f \Delta_f (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4-23)$$

将式 (4-23) 代入式 (4-22) 可得

$$\frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{2} (1 - \sin \varphi') = K_0 \sigma_c \sin \varphi' - A_f \sin \varphi' \Delta_f (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4-24)$$

将式 (4-21) 代入式 (4-24), 消去 $\Delta_f (\sigma_1 - \sigma_3)$, 最终得到 K_0 固结条件土的 c_u 与上覆固结压力 σ_c 间的关系为

$$\frac{c_u}{\sigma_c} = \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)_f}{2 \sigma_c} = \frac{\sin \varphi' [K_0 + A_f (1 - K_0)]}{1 + \sin \varphi' (2 A_f - 1)} \quad (4-25)$$

试比较式 (4-15) 与式 (4-25), 可知两者只差一个 $[K_0 + A_f (1 - K_0)]$ 的乘数。

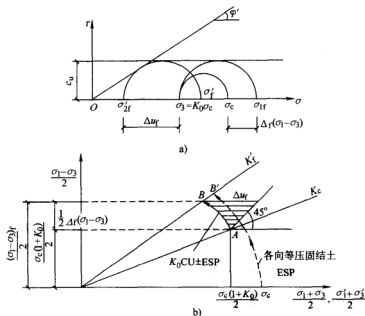


图 4-32

通常, 正常固结粘土的 $K_0 < 1.0$; 而且 $A_f \leq 1.0$ (大致在 $0.85 \sim 1.0$ 间), 则可推知: K_0 固结条件下的 CU 试验所得 c_u 总稍小于各向等压固结条件下的数值。图 4-32b 中两者的有效应力路径对比说明了 K_0 在 CU 试验中破坏点 B 的纵坐标略小于 B' 点。

式 (4-25) 适用于预测正常固结粘土地基的 $c_u - \sigma_c$ 关系的规律。各国研究者曾将室内 K_0 在 CU 试验成果与现场十字板剪切试验, 静力触探试验等成果作了对比验证, 认为十分符合。图 4-33 表示地层中静力触探成果推算得的 c_u 随深度 Z 的变化。在地表下一定深度内因有超固结的硬壳土层埋藏, c_u 与上覆固结压力 σ_c 不成正比, 而其下相当深度内, 不但 c_u 实测值与 σ_c 成正比, 而且 c_u 的近似分布直线向上延长段通过原点, 表明下卧土层确属正常固结土层, 历史上未受过比 $\sigma_c = \gamma Z$ 更大的上覆压力, 并且由此可以推论上覆的硬壳土层的“似超固结”特性并非应力历史所造成的。

Skempton (1957 年), Leonards (1962 年), Scott (1963 年) 等人汇总了各国正常结粘土的 c_u/σ_c 关系, 找出它与粘土塑性指数 I_p 间呈线性关系的规律。 I_p 越大, 即塑性越高的粘土, c_u/σ_c 也就越大。其关系式为

$$(c_u/\sigma_c) = 0.11 + 0.0037I_p \quad (4-26)$$

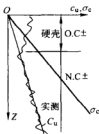


图 4-33

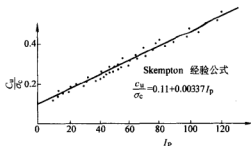


图 4-34

见图 4-34，但应注意，式中塑性指数 I_p 的取得，是根据美、欧惯用的碟式液限仪测定的液限 w_L 减去搓条法量测的塑限 w_p 而算出的。自 1984 年起修订《土工试验规程》过程中，已将锥式仪入土深度由规定的 10mm 改为 17 ~ 18mm，则由此测得 w_L 的结果与原碟式液限仪等效。

4.3.3 非饱和土的抗剪程度

非饱和土的抗剪强度之确定与其有效应力原理和孔隙压力特性密切相联系，而这又离不开对非饱和土中气相和液相以及土粒与液、气相接触面形态的分析。

开展非饱和土抗剪强度问题较早的美国垦务局研究者们在其处理其强度问题时采取的是强度参数，即： c'_{ua} ， φ'_{ua} 和 c'_{uw} ， φ'_{uw} 。两者的主要差别在 c' 值上，而 φ' 值两者较为接近。工程设计中究竟采取何种参数视工程具体情况而定。这种处理方法较为简单，但机理分析不足。

毕肖普 (Bishop) 于 1959 年提出非饱和土的有效应力表达式为

$$\sigma' = \sigma + \chi(u_a - u_w) - u_a \quad (4-27)$$

式中 χ —参数， u_a 与 u_w 分别为气相和液相孔隙压力。

然后，在此基础上获得了非饱和土的抗剪强度为

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_f = a' + [(\sigma_3 - u_a)_f + \chi(u_a - u_w)_f] \tan \varphi' \quad (4-28)$$

式中所有脚标 f 均表示土已达破坏状态， a' 为试验参数。该方程式与式 (4-27) 存在着同样的问题，即它没有从理论上充分得到验证。毕肖普所作的验证试验中并未检验土的强度性质是否与 $(\sigma_3 - u_a)$ 和 $\chi(u_a - u_w)$ 的变化无关，而认为 $\sigma' = \text{常数}$ ，那么土的强度性质也就完全确定了，事实上并未得到证明。所以 Bishop 所定义的 $[\chi u_w + (1 - \chi) u_a]$ 与总应力差并非真正有效应力，而仅仅是一个粒间压力。面积系数 χ 原来按 Bishop 的定义是：气相与土粒的接触面面积和液相与土粒接触面面积之比。可是，这样的概念以及土粒接触的概念等对粘土

来说,其物理含义仍是含糊不清的。因此,系数 χ 仅仅是一个经验常数。且因多种因素的影响, χ 值的确定也存在着困难。Gulhati 曾指出, $\chi-S_r$ 间的惟一性关系是有疑问的。同时,非饱和土体中有封闭气体和开敞气体之分, χ 值没有对这两种气相形态加以区分,而事实上只有当土中气相与外界大气没有交换,即气相处于内部连通状态和完全封闭状态时或饱和度 S_r 大于临界值时, χ 值才有意义。Goleman 还指出, χ 值对于土的强度问题和体变问题是不同的。有人还发现土的结构和体积变化取决于饱和方向(或饱和路径,指含水率增加还是减小的变化方向)。

有效应力原理在非饱和土中的局限性,促使人们直接从 σ_1 、 σ_3 、 u_w 和 u_a 等值的变化,研究它的应力—应变关系,而不必求助于人为的参数 χ 。

加拿大的 Fredlund 等人 1978 年比较系统地研究了这个问题。认为非饱和土的法向应力变量 $(\sigma - u_a)$ 和 $(u_a - u_w)$ 这一组合最能满意地表征非饱和土的应力状态。用上述两个变量并参照莫尔—库仑方程得出了非饱和土的抗剪强度表达式

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a) \tan \varphi' + (u_a - u_w) \tan \varphi^b \quad (4-29)$$

当土趋于饱和时 $u_a - u_w = 0$, $u_a = u_w$, 则该式退化为

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_w) \tan \varphi' \quad (4-30)$$

式(4-29)中,参数 φ' 的含义与饱和土的相似。参数 φ^b 相当于土的基质吸力 $(u_a - u_w)$ 对抗强度的贡献大小。

Fredlund 还建议以三维空间 $\tau_f - \sigma - (u_a - u_w)_f$ 坐标来表达破坏面。从式(4-29)形式可知,该破坏面为一平面,其在纵轴(τ 轴)上的截距为凝聚力 c' ,如图 4-35 所示。

式(4-29)的物理意义十分明确清楚。它把由于外荷的有效应力 $(\sigma - u_a)$ 所引起的剪阻力与由于土内部的有效应力 $(u_a - u_w)$ 的剪阻力分开来,因为这两种有效应力的物理概念和作用确实是不相同的。

参数 φ^b 的求法如下:当取 $(\sigma - u_a)_f$ 为常数时,改变 $(u_a - u_w)$ 值可得不同的 τ_f 值,并在 $\tau_f - (u_a - u_w)$ 图(见图 4-36)上求得 φ^b 值。可以看出式(4-29)中三个参数 c' 、 φ' 和 φ^b 三个参数均需由试验求出,这就避免

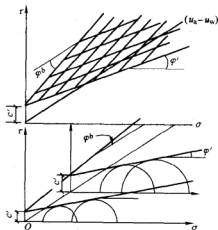


图 4-35

了像毕肖普公式所遇到的 χ 值的不确定性和求 χ 值的困难了。因此，这个公式不论在概念上还是使用上都较优越，概念更合理清晰，使用更方便准确。该方法不仅适用于土内孔隙空气处于内部连通阶段，而且也适用于孔隙空气处于部分连通阶段。

式 (4-29) 的验证工作已有许多国家的研究者进行过。所有成果都显示出相关性极好的规律，每一种土的试验数据基本上都落在一个三维空间 $\tau - \sigma - (u_a - u_w)$ 坐标中的一个平面上。例如萨蒂伽 (Satiya) 用 Dhanauri 粘土作试验求得

$$c' = 11.3 \sim 37.3/\text{kPa}$$

$$\varphi' = 28.5^\circ \sim 29^\circ$$

$$\varphi^b = 12.6^\circ \sim 22.6^\circ$$

又如霍 (D.Y. Ho) 采用一个试样分级加荷的方法进行的试验得出：对于风化花岗岩， φ^b 的平均值和标准差为 $15.3^\circ \pm 5.7^\circ$ ；对风化火山岩， $\varphi^b = 18.8^\circ \pm 2.4^\circ$ 。把试验求得的 φ^b 值与外荷引起的值相比可以发现，对一般土， φ' 高于 φ^b 值， φ^b 约为 φ' 的一半或更多一些。如霍所求得的风化花岗岩和风化火山岩的 φ' 值可达 $33^\circ \sim 35^\circ$ 以上。

值得指出的是，由土的基质吸力 ($u_a - u_w$) 所增长的强度实际上相当于增大图 4-35 中纵轴上的截距，即凝聚力 c' 。因此，非饱和土的总凝聚力表达式为

$$c = c' + (u_a - u_w) \tan \varphi^b \quad (4-31)$$

在 c 值中直接考虑基质吸力的影响，这种作法大大地简化了非饱和土抗剪强度研究的复杂性。此外，还应指出：非饱和土抗剪强度的来源还不止于上述二项，物理—化学作用所引起的溶质吸力也会增加其抗剪强度。

4.3.4 原状粘土的抗剪强度问题

原状粘土的抗剪强度问题最主要的内容有如下三方面：超固结裂隙粘土的残余强度问题；原状粘土的各向异性对强度的影响；灵敏粘土的问题。

1. 超固结裂隙粘土的残余强度问题

派克 (Peck) 剖析了 UU 试验总应力强度 c_u 应用于天然土坡稳定问题会带来

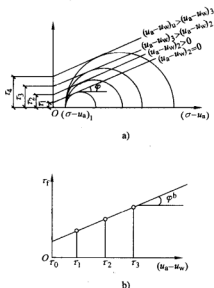


图 4-36

巨大误差。他总结此问题指出：采用 $c_u = q_u/2$ 和 $\varphi_u \approx 0$ 指标对原状土作不排水强度分析可以较好地适用于正常固结粘土和轻微超固结粘土的土坡工程，但对严重超固结粘土构成的天然土坡则从实测滑坡 c_u 反推而得的安全因数将会偏高很多。这段话的意思是：产生滑动的天然土坡，实际上安全因数应该是 $F_s = 1.0$ ，可是从钻孔挖坑取样做 q_u 试验求得的 c_u 推算得的 F_s 却要大多得多。越是干硬的严重超固结土，两种 $F_s - c_u$ 的差别就越大。

图 4-37 表明总应力分析法（采用 UU 试验成果，称为 UU 分析法）计算得天然滑坡的 F_s 偏高，偏于危险。例如，土处于塑限状态， $I_L = 0$ 计算的 $F_s \approx 4.0$ ，而实际只有 1.0。如果 $I_L < 0$ ，且存在大量裂隙的干硬粘土，则计算得的 F_s 就更大。

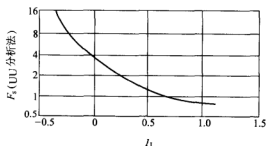


图 4-37

即使采用有效应力分析，取强度指标 c' 、 φ' 的峰值，仍然会得出计算 F_s 偏高的结果。这充分证明了由滑坡体形状、尺寸、岩土性质和水文地质条件所决定的岩土实际强度要大大低于实验室峰值指标。不仅岩土本身有应变软化的特征，而且在土坡土体中各点，随着整体变形的发展，这种应变软化特征起的作用也存在，只是有早有迟。因此，这类土坡多呈渐进性破坏（progressive failure），意思是各点强度值是“各个击破”的。

例如图 4-38 中填土和地基内 A、B 和 C 三点处的位置不同，土质也不同。当土坡滑动开始形成后，这三点在某一给定时刻所产生的剪切变形量 γ 是不同的，往往在 A 点以左，坡趾附近应力集中，变形量大，逐渐向右上方发展。此外，不同部位因土质各异而 $\tau - \gamma$ 应力应变曲线也不一样。在时间 t_1 时，A 点土已达峰值强度，而 B、C 两点则尚未达到峰值。 t_2 时刻，B 点刚好达到峰值强度，而 A 点已从峰值下降，但 C 点的强度还处在上升阶段。 t_3 时刻，C 点达峰值强度，而 A、B 两点都已过峰值而继续下降。要到 t_4 时刻，滑弧上各点才能全都逐渐趋于各土层土体的终值强度 τ 。因此，严重超固结裂隙粘土的残余强度问题只是研究剪应力与剪应变的关系，探讨大应变时土的强度降低量，而由这种土构成的土坡的长期稳定性还牵涉到整个滑坡体的渐进性破坏问题。残余强度和渐进性破坏是相互联系又相区别的两个概念。至于有蠕变特性的软粘土还具有与时间有关的“长期强度”特征，其本质又与上述两个概念不同。本节不予讨论。

(1) 残余强度机理与测试方法 严重超固结粘土在排水剪条件下，开始因试

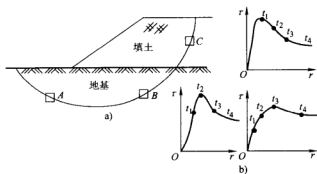


图 4-38

样内产生负孔隙水压力，使表观强度较高，而且土结构尚未破坏，一般会出现峰值强度 τ_{fp} (peak strength)，其后随着应变增加，水分逐渐进入试样内，一方面消除负孔隙水压力，另一方面在土的裂隙面内起滑润作用，甚至使土的结构破坏，以致强度渐减。这就是应变软化过程，最终达到大应变时的终值强度 τ_{fr} (residual strength)。对于一些不存在裂隙的超固结粘土，也会由于颗粒排列的定向化使强度从 τ_{fp} 逐降为 τ_{fr} ，因此，随着剪切发展土中含水率增高，消除土中负孔隙水压力和粘土颗粒在剪切带内的排列定向化是超固结土应变软化的两大原因。相反地，在不排水剪条件下，严重超固结土内负孔隙水压力不能消除，土的应变软化特征就不大明显，所以 UU 试验成果 c_u 偏高。

排水条件下的 τ_{fp} 与 τ_{fr} 之差别取决于土的矿物成分、应力历史、原有裂隙发育程度、超固结比和沿剪切面原来有否滑移现象等。一般，正常固结粘土和轻微超固结粘土的 τ_{fp} 与 τ_{fr} 差别不大。西蒙思和门席思 (Simons 和 Menxies) 就认为正常固结的高塑性粘土土坡中不大可能出现长期滑坡现象，要么在施工期和竣工时失稳，否则随着土的逐渐固结土坡稳定性只可能随时间而不断增长。土坝工程中人工压实粘土，虽具有超固结特性，但是很少存在着结构上的非连续性，一般为无裂隙节理，因此， τ_{fp} 与 τ_{fr} 的差别不很显著。

影响 τ_{fr} 的因素还有：粘粒含量（越多则 τ_{fr} 越小）；塑性指数 I_p （越大则 τ_{fr} 越小）；粘土矿物成分（钠蒙脱土的 φ'_r 只有 4° ， φ'_r 为有效残余内摩擦角）；法向应力幅值 (σ'_n 并非常数， σ'_n 增大， φ'_r 有所降低)；剪速影响（越慢则 τ_{fr} 越小）；初始应力状态和土体内非连续性面的存在情况等。

残余强度 τ_{fr} 的测定方法可分为三大类 (图 4-39)：

- 1) 直剪仪中多次反复剪切。
- 2) 沿一定方向作三轴剪切。
- 3) 环式土样直接剪切 (连续剪切)。

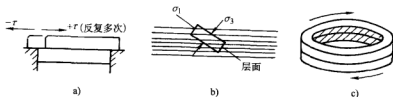


图 4-39

a类试验是最常用的方法,我国已积累了丰富的应用经验,但是它不能模拟实际固定方向的大变形剪切,每反复一次,土颗粒排列在剪切带内就被扰动一次。b类试验可根据工程问题选择合适的剪切方向,但它本身能容许的变形量有限,不能做大变形试验。c类试验可定向剪切,且可做大变形试验,试样盒内上、下两半土体之间相对滑移量不受限制,但制备环式土样困难。

(2) 土的脆性指数 (Brittle Index) I_B I_B 是表征超固结 τ_{fp} 与 τ_{fr} 差别的一个特征参数。一般它被理解为土脆性程度的判据,然而“脆性”两字的提法不很确切。有的超固结粘土从 τ_{fp} 下降到 τ_{fr} 所需的剪应变要达相当大的数量,见图 4-40 中虚线所示。这个数量取决于土类,试验条件和法向应力 σ_n 。

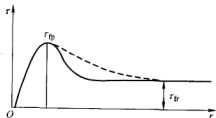


图 4-40

(3) 渐进性破坏机理的进一步分析
通常采用的土坡稳定分析方法,是简单地将土体视作刚塑性体,认为沿整个滑动面上的强度是同时达到的。实际上土远非刚塑性体,不仅有非线性应力—应变关系,而且还有应变软化特性,致

使整个滑动面上抗剪强度的发挥程度不是同步而均匀的。太沙基和派克 1948 年 (Terzaghi 和 Peck)《工程土力学》一书以及泰勒 (Taylor)《土力学原理》一书中都曾指出:土体中由不均匀应力和应变条件所引起的渐进性破坏现象必须与可能出现的滑动面上剪应力重分布相联系起来。

若土具有应变软化特性,土中某单元则它在峰值破坏之后继续受剪时,将不能保持原来的应力状态,有部分应力将会转移到邻近的单元上去。这样,邻近单元土体也要逐渐地达到它的峰值强度而相继破坏。如此发展下去,就形成了整个滑动土体的渐进性破坏。所以,问题关键不仅在于土具有应变软化特性,而且还必定要具备产生应力局部重分布的可能性。如果土质均匀,且滑动面上剪应变的发展又一致,即使土具有明显应变软化特性,则渐进性破坏仍不可能产生。总之,必须同时满足下列三个条件,渐进性破坏才有可能:

- 1) 土具有明显应变软化特征, 峰值破坏后强度损失很大。
- 2) 要有应力集中的局部区域存在。
- 3) 边界条件有提供土体产生不均匀变形的可能。

从上述内容也可引出这样一个概念: 对于渐进性破坏的土坡, 沿整个滑动面实际发挥的平均抗剪强度介于峰值与残余值之间。对此, 斯坎普顿提出了一个“残余因素”(Residual Factor)的概念

$$R = \frac{\bar{\tau}_p - \bar{\tau}_f}{\bar{\tau}_p - \tau_{fr}} \quad (4-32)$$

式中 $\bar{\tau}_p$ 、 τ_{fr} ——滑动面上土样中测出来的相应于平均有效法向应力的峰值强度和残余强度;

$\bar{\tau}_f$ ——现场滑动面上实际发挥出来的平均抗剪强度, 它介于 $\bar{\tau}_p$ 和 τ_{fr} 之间, 若 $\bar{\tau}_f = \bar{\tau}_p$, 则 $R = 0.0$, 即不出现渐进性破坏; 若 $\bar{\tau}_f = \tau_{fr}$, 则 $R = 1.0$, 表示渐进性破坏现象极为严重。

式 (4-32) 也可表示为图 4-41。

图 4-41 中的实际土坡, 其 $\bar{\tau}_f$ 约相当于 $R = 0.5$ 。这个 $\bar{\tau}_f$ 数值的确定颇不容易, 常需要依靠丰富的工程经验和工程实例的反演资料。

还应注意, 图 4-41 中滑动面上平均有效法向应力也应根据滑动时孔隙

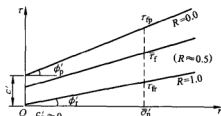


图 4-41

水压力的准确估计值推得, 这又需要众多的实测资料来佐证。

经过多起天然滑坡事故的验算, 凡属均质无裂隙且未风化的粘土土坡, $\bar{\tau}_f$ 接近于 τ_p 。相反地, 有节理裂隙的风化粘土, 则从天然滑坡中算得的 $\bar{\tau}_f$ 就接近于 τ_{fr} , 即 $R \approx 1.0$ 。斯坎普顿 (Skempton) 特别强调裂隙与节理的作用, 它们一方面削弱了土体的整体强度, 另一方面又是应力集中的所在之处, 在裂隙和节理的端部会产生局部的超应力, 使土超过峰值强度而屈服。

对未破坏的土体, 其剪切滑动上的 $\bar{\tau}_f$ 选值颇有困难。有些研究者建议取峰值强度进行计算, 但乘以一个渐进性破坏的修正系数。很显然, 这个修正系数要结合土体的应力—应变关系以及具体受力条件而定, 不能得出一个通用的经验数值, 不仅是超固结裂隙粘土, 其他应变软化土都有 $\bar{\tau}_f$ 问题。

卡特兹罗蒂 (Kaltzrotis) 等针对一具体的地基稳定性问题 (见图 4-42a) 及基土的应力—应变关系 (图 4-42b) 考虑到地基土的应变软化特征, 得出一个修正系数图 (图 4-43)。就是说, 当按常规方法采用峰值不排水强度计算出饱和粘土地基承载力时, 还要乘以一个修正系数 μ_R , 即

$$q_b = \mu_R N_0 \frac{c_{up}}{F_0} + q_a \quad (4-33)$$

式中 q_b ——地基容许承载力；
 c_{up} ——峰值不排水强度；
 μ_R ——修正系数，按图 4-43 查取；
 N_0 ——凝聚力项承载力因素；
 F_0 ——安全系数，考虑 μ_R 后， F 值可适当取小一些；
 q_a ——基底面上的旁侧荷载。

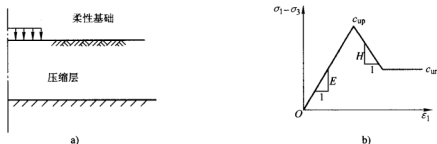


图 4-42

图 4-43 中的 μ_R 值与应变软化比 S_R 值和脆性指数 I_B 值这两个参数有关，其他为

$$I_B = \frac{c_{up} - c_{ur}}{c_{ur}} \quad (4-34)$$

$$S_R = -E/H \quad (4-35)$$

式中 c_{ur} ——终值不排水强度；
 E ——应变硬化段的斜率；
 H ——应变软化段的斜率。

以上的数值均从简化的应力—应变关系图中取得，见图 4-42b。

综上所述，渐进性破坏的影响不仅在严重超固结的裂隙粘土中，而且在一切应变软化土中都可能起重要作用，例如：许多灵敏度高的饱和粘土，就是如此。不过渐进性破坏的机理，特别是物理原因有所不同。

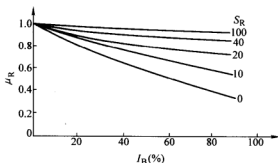


图 4-43

2. 土的各向异性对抗剪强度的影响

通常三轴剪切试验都是用钻孔取样,切取铅垂向轴的圆柱试样来进行的。这样的试验,破坏面必与天然土沉积条件下所形成的近似水平向的层面斜交(对各向同性土,理论上夹角 $\alpha_f = 45^\circ + \varphi'/2$),因此,对于各向异性土或成层土,这样所得的强度指标要比沿水平层面进行直接剪切所得者更高。然而,不少工程(如天然土坡)的稳定性往往受水平层面滑动所控制,这种情况下,土的强度指标应以沿层面,特别是沿软弱夹层面的直剪成果为准比较可靠,而常规的竖轴试样三轴试验成果与实际滑动面上的不符。为了使三轴剪切产生的破坏面与层面方向一致,就必须斜切钻孔所得的土样块,制备成斜轴试样(图4-45)。图4-44表示常规试验的试样方向。

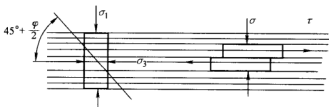


图 4-44

在大尺寸试样中,由于某些原状土有定向的节理裂隙,特别是众多的裂缝的存在,使土的强度的各向异性特征更为明显。不过,各向异性的特征方向由非连续性面的概率分布所决定。此外,有的土层中(主要沿层面)存在着历史上先期产生过的滑动面,则沿这些面的抗剪强度比其他方向更低。

如果对超固结粘土做不同轴向的三轴不排水剪切试验求 c_u , 则可得 σ_1 轴方向与 c_u 的关系,如图4-45所示。

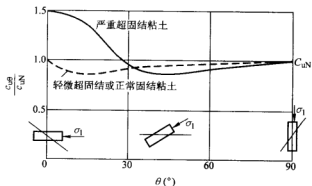


图 4-45

图 4-45 中 θ 为 σ_1 轴与水平面夹角; $c_u(\theta)$ 为夹角为 θ 的土样的不排水强度; c_{uN} 为 $\theta = 90^\circ$ 标准的竖轴试样的不排水强度。

由图 4-45 可知, 严重超固结粘土的各向异性对强度的影响程度更其明显, 尤其是 $\theta = 0^\circ$ 时水平 σ_1 轴试样的不排水强度指标要高出竖轴的 c_{uN} 很多 (有达 1.5 倍)。而浅层土的情况比深层土要好一些 (图未示出)。斯坎普顿的解释是: 由深层严重超固结粘土中有很高的横向原位固结压力 ($K_0 > 1.0$) 所致。

目前常用的室内外抗剪强度测试方法都有其各自剪面定向性 (上述三轴剪与直剪也是这样), 现场常规十字板强度试验成果则主要代表铅直面上的强度。试验方法不同, 剪切面方向有可能不同, 因此, 各种测试成果间差异的原因就包括了各向异性的因素。

土各向异性的影响, 不仅反映在、 c_u 、 c' 和 φ' 等强度指标上, 还反映在孔隙水压力系数 A 的数值变化上。某一正常固结粘土的 A_f 值与 θ 的关系如图 4-46 所示。

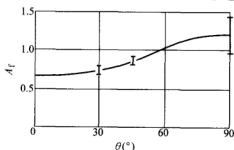


图 4-46

粘土的各向异性不仅对 τ_f 有影响, 而且对 θ 角不同时土样的应力—应变曲线形状也有影响。在这方面, 粘土质页岩表现得特别明显。著名的瓦柯 (Waco) 坝滑坡事故是最典型的事例之一。据勒瓦艾特和邓肯 (Wright 和 Duncan) 的分析, 认为其主要原因是由于坝基中存在有一粘土页岩层。对试样进行无侧限抗压强度试验, 发现当 θ 角为 30° 和 45° 时的 q_u 值要比通常用的竖轴试验 ($\theta = 90^\circ$) 所得的强度 q_u 降低很多, 只有后者的 40%, 甚至还不到。其原因可能是水平向原来就有裂缝和滑面的存在, 而 θ 在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 范围内刚好相应于破裂面沿页岩层面方向产生的缘故。这种粘土质页岩的应力—应变曲线也随 θ 角而变, 如图 4-47 所示。

图 4-47 表示: $\theta = 30^\circ$ 和 45° 时, 强度虽低, 但应力—应变曲线并不呈应变软化特征。而垂直轴和水平轴试样的强度在峰值之后有很大的降低, 应予注意。总之, 盲目套用常规方法进行竖轴试验对各向异性土来说是十分危险的。

目前, 许多原位测试手段或者只能代表一定的方向上的成果 (如旁压仪和十字板抗剪强度试验), 或者根本不能提供土各向异性的强度和变形特征的任何资料, 而只是笼统地提供土的大致强度 (如静力触探标准贯入试验等)。

土强度的各向异性产生的原因都和土中结构的各向异性有关。天然土层在 K_0 条件下沉积固结时, 土有一种偏于水面的定向排列的趋势, 这样就必然会引引起强度在各个方向上的差异。不同的强度各向异性变化规律和土的矿物成分也有关。不排水强度的各向异性, 从表现上来看, 是由于破坏时所产生的孔隙压力不

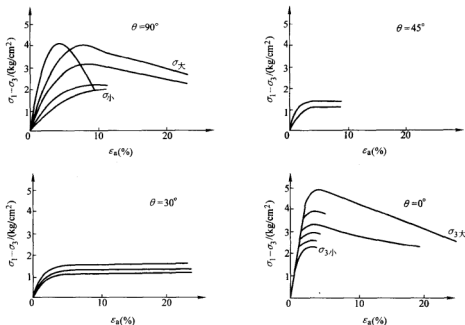


图 4-47

同而引起的，亦即由于有效应力路径不同而引起的，而实际上则是由于土体的压缩性的各向异性所引起的。尽管不排水强度随 θ 而变，但有效强度的参数 c' ， φ' 却不受其影响。对这类结构上各向异性，承受较大的各向等压固结（达固结压力 σ_c 的 2.5~3.0 倍）可期望得到消除。因为在 K_0 固结条件下某些土粒的定向排列，在较大的各向等压的应力作用下会遭到破坏。另一种引起土层各向异性的原因是土体由一些薄的互层所组成，而互层的强度不同。对于这种各向异性，显然不能通过增加各向等压固结压力而消除。

为了要考虑强度上的各向异性，在地基稳定分析中，最简单的办法是取平均值作为实际强度。具体的作法之一是取

$$c_{uf} = \frac{c_{u0} + c_{u*}}{2} \quad (4-36)$$

式中 c_{uf} ——各向异性土的平均不排水强度；

c_{u0} ——三轴压缩的 K_0 固结不排水强度；

c_{u*} ——三轴拉伸的 K_0 固结不排水强度。

另一种经验方法是：考虑到单剪测定的强度可以反映圆弧水平段的强度，因而取 c_{u0} 、 c_{u*} 和 c_u （单剪不排水强度）三者的平均值作为地基计算的平均强度

值,并认为该值可能给计算带来较可靠的结果。

除了用上述粗略的经验方法之外,可以在掌握 c_u 随 β 变化的规律之后采用曲线拟合的方法选择比较合适的各向异性强度破坏准则表达式,然后在土体的稳定计算分析中考虑滑动面各段的倾角,分别取用 $c_{u\beta}$ 值。例如 Bishop 建议的公式为

$$c_{u\beta} = c_{uv}(1 - a \sin^2 \beta)(1 - b \sin^2 \beta) \quad (4-37)$$

式中 $c_{u\beta}$ ——任一 θ 角度的不排水强度,注意它与图 4-45 中的 c_u 概念不同。这里 β 角是指倾角,即研究强度面与铅直面间的夹角;

c_{uv} ——垂直面上的不排水强度, $\theta = 0^\circ$;

a 、 b ——经验参数,由 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 等方向上的强度来决定。

3. 灵敏粘土的抗剪强度问题

众所周知,具有蜂窝状和絮状结构的粘土,它们的孔隙很大,粒间接触点上具有表面力的作用,使结构得以维持。这种结构通常是很不稳定的,只要稍加扰动就会遭到破坏,致使土丧失稳定性而像液体一样流动。例如北欧诸国的某些灵敏粘土,其灵敏度 S_l 可达 64,甚至 100 以上。粘土结构的触变性质是某些地区(如加拿大 Quebec 的 St. Thuribe 地区)泥石流产生的根源。许多地区的红粘土土坡也会发生泥流现象。

关于粘土结构和它的物理化学性质对灵敏度的影响是土质学研究的范畴。它涉及土颗粒排列与相邻颗粒间电作用,沉积过程中液体介质的性质(如离子浓度和种类)、颗粒的大小与形状、矿物成分、沉积后的地质作用和荷载历史,以及化学胶结和淋滤作用等。

灵敏粘土的抗剪强度机理与上述饱和和正常固结粘土 $w_f - \sigma_f - \tau_f$ 单一关系的规律有很大不同。

(1) 正常固结的灵敏粘土的抗剪强度 所谓正常固结是指试验中所施加的固结压力 σ_c 比较大,灵敏粘土的结构已部分地遭到破坏,土基本上具有正常固结特征,但与重塑的正常固结土仍有差别。

挪威土工研究所经过系统试验,研究结果表明:CU 试验中,正常固结灵敏粘土的偏应力已达到 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 后,孔隙水压力仍继续随着轴向应变而不断增长,其总值可达 σ_3 的 70% 以上,而且 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 略有下降。 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 峰值相应的轴向应变 ϵ_a 较小 ($< 2\%$)。但它的有效主应力比 σ'_1/σ'_3 要在较大的 ϵ_a 时 ($> 4\%$) 才达到它的最大值(图 4-48)。

这样就牵涉到强度破坏标准的取值问题:

$(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 和 $(\sigma'_1/\sigma'_3)_{\max}$ 两者以哪一种为准? Kenney 研究结果发现:首先,两者之间的差别程度与灵敏度 S_l 有关, S_l 越大,差别越大;其次,总的趋势是

S_1 越大, 孔隙压力系数 A_f 越大; 第三, 按 $(\sigma'_1/\sigma'_3)_{\max}$ 标准所得的 A_f 大于按 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 标准所得者 (图 4-49)。

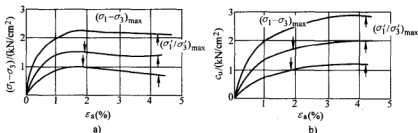


图 4-48

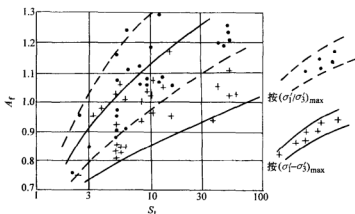


图 4-49

可将肯尼 (Kenney) 的三点结论用应力路径图形来分析解释 (图 4-50)。灵敏粘土有效应力路径 ESP 的特征是: A 点的偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 最大。其后, ϵ_a 继续增加时, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 有所降低, 但孔隙水压力继续增长。这两种现象都是灵敏土结构继续遭受破坏的反映, 说明灵敏粘土在不排水剪切过程中有应变软化特征。这种特征与严重超固结粘土在排水剪中吸水软化的过程迥然不同。按 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 标准确定的 c_u 值较大, 但它所相应的轴向应变变量较小, 只有 $0.6\% \sim 2.0\%$ 之间。这在工程问题中实际意义不很大, 如土坡稳定问题总涉及大变形问题和渐进性破坏问题, 较大的 c_u 值不能贸然应用。但另一方面, 按 $(\sigma'_1/\sigma'_3)_{\max}$ 标准取 c_u 值, 肯定小些, 貌似安全, 可是确定有效应力强度 ϕ' 指标时, 按此标准就很大, 又可能偏于不安全。

(2) 超固结灵敏粘土的强度特征 如果对具有结构强度的灵敏粘土施加较大

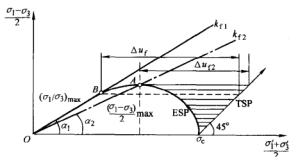


图 4-50

的固结压力 σ_c ，结构破坏严重，土得以充分产生体积压缩，则它的 CU 破坏强度 c_u 还是比较高。但是， σ_c 刚刚达到某一不大的值，土结构有一定破坏时，其 c_u 可能比未施固结压力者更小。

图 4-51 中 q_u 为无侧限抗压强度试验的有效应力路径，CU 和 CD 分别为固结不排水剪和排水剪的有效应力路径。只是应该特别说明的是：这里 CD 是一种特殊的等体积排水剪，剪切过程中虽能排水或吸水，但控制围

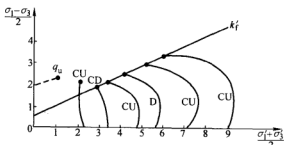


图 4-51

在 σ_3 和轴压 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ ，使试样体积保持不变，这样可使应力路径模拟不排水剪有效应力路径形状。经过实测，所得 CU 和特种 CD 试验的有效应力路径不但都在同一条破坏线 (K_f 线) 上终止，而且形状都相似。然而，当围压小于 $3.0 \sim 3.5 \text{ kg/cm}^2$ 时，试样固结排水量小，体积未锐减，土的结构并未产生大的扰动，保留的结构强度大，破坏点位置高出 K_f 线较多。图中 q_u 值和 $\sigma_c = 2.0 \text{ kg/cm}^2$ 及一条有效应力路径就表明了这一点。

结论是：过大过小的 σ_c 都可得较大的 c_u ，一定范围内的 σ_c 变幅，不能使土固结所引起的强度增值抵偿结构破坏所造成的强度损失。而 q_u 试验强度之所以较高，是由于强度中有相当大的一部分系由灵敏土刚性结点的联结强度所构成的。这种联结强度是土在漫长的地质年代中逐渐发展起来的土壤结构性所决定的，只有未扰动的超固结灵敏粘土才具有，是无法用重塑土来模拟的。

还有一个值得注意的现象必须提及。克劳福特 (Crawford) 曾观察到 Leda 灵敏粘土在 q_u 试验和低 σ_3 围压下所作的 CU 试验中，试样的破坏往往不属摩擦滑动型 (剪破型)，而是属于断裂型的破坏 (图 4-52) 当然，试样一定应为严格未

扰动者；钻孔取样者，结构多少有破坏，常呈剪破型。克劳福特解释产生张性断裂的原因是灵敏土在低 σ_3 下具有脆性特性，不能承受相当小的侧向有效张拉应力（意即 σ_3 为负值）。

(3) 灵敏粘土的重塑和扰动效果 在受外荷后，原状结构的灵敏粘土骨架是承受部分荷载作用的，不像重塑土那样受荷瞬时外荷全由孔隙水承担。因此，同样的含水率条件下，对试样施加同一 σ_3 固结，两试样的 CU 试验的 ESP 完全不同。不扰动土的强度要大得多。一旦被重塑，又不允许试样继续排水。于是孔隙水压力 u 就猛增。再从某一 σ'_3 ($=\sigma_3 - u$) 开始对此重塑土进行 CU 试验，破坏强度 c_u 就骤减。有效应力路径的分析可由图 4-53 得到说明。

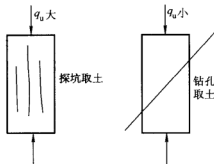


图 4-52

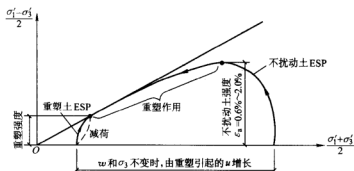


图 4-53

参 考 文 献

- 1 黄文熙主编. 土的工程性质. 北京: 水利电力出版社, 1983
- 2 刘祖德, 陆士强, 包承纲, 马时冬, 王幼麟. 土的抗剪强度特性. 岩土工程学报, 1986, 8 (1): 6~46
- 3 刘祖德. 土的抗剪强度的取值标准问题. 岩土工程学报, 1987, 9 (2): 11~19
- 4 河海大学, 江苏宁沪高速公路股份有限公司主编. 交通土建软土地基工程手册. 北京: 人民交通出版社, 2001
- 5 林宗元主编. 岩土工程试验手册. 辽宁: 辽宁科学技术出版社, 1994

第 5 章 土的渗流理论

5.1 土体渗流的基本概念

粘性土、砂性土、石、碎石土等各种土类，由于在生成过程中水和风的搬运，使其大多成为松散的粒状堆积物，因而土体属于孔隙互相连通的多孔介质。在水头差的作用下，流体可以透过土体孔隙而产生流动，这种现象称为渗流。对于饱和土，流体是水，对非饱和土，流体是水和空气，非饱和土的渗流比较复杂。

土体具有被流体透过的性能称为土体的渗透性。不同土体的透水能力是不同的，土体的透水能力与土的组成、结构、孔隙率、饱和度等有关。由于土体中孔隙的大小、形状及其分布是非常复杂的，无法像地表水一样，获取流体在土体孔隙中的真实流速，所以常采用平均的概念和综合性的参数来表征其渗流性质。

无论是对饱和土体还是非饱和土体，驱动水体产生流动的最根本原因是土体中的水相具有势能，能量主要由三部分组成：重力能、压力能和速度能，考察图 5-1 所示土体中的 A 点，位于基准面之上高程为 z ，那么该点水体具有的总能量水头（简称总水头）为

$$h = h_z + h_p + \frac{v_w^2}{2g} \quad (5-1)$$

式中 h ——总水头， h_z 为位置水头，其大小等于该点离基准面的高程 z ；

h_p ——压力水头；

$\frac{v_w^2}{2g}$ ——速度水头。

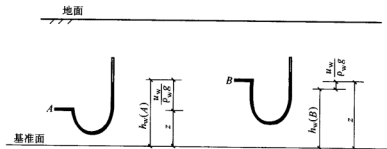


图 5-1 土体中的总水头

与重力水头和压力水头相比,土体中水的速度水头很小,往往可以忽略不计,因此式(5-1)可以进一步简化,土体中任一点水头的表达式可写为

$$h = h_z + h_p = z + \frac{u_w}{\rho_w g} \quad (5-2)$$

式中 $u_w = h_p \rho_w g$ 为孔隙水应力。

两点间的水头差是导致饱和及非饱和土中水流动的真正原因。例如图 5-1 中的 A 点和 B 点, A 点的总水头为 $h_A = z_A + \frac{u_w}{\rho_w g}$ (A), B 点的总水头为 $h_B = z_B + \frac{u_w}{\rho_w g}$ (B), A 点的孔隙水应力为正值,采用测压计量测, B 点孔隙水应力为负值,采用张力计量测,由于 A 点的总水头高于 B 点,水将由 A 流向 B 点。因此,无论对于饱和土还是非饱和土,引起水相流动的驱动势能都具有相同形式。无论孔隙水应力是正值还是负值,水总是由能量高的点流向能量低的点。

渗流分析的目的就是研究渗流域内的水头分布、水流速度和方向,以及孔隙水应力的分布。渗流问题是岩土工程中一个重要的课题,如边坡中的渗流、堤坝中的渗流、地基中的渗流以及基坑渗流等等(图 5-2)。工程中常见的砂沸、流土、管涌等岩土破坏现象皆与土的渗流有关,渗流对土体的强度、变形还具有重要的影响,如土体固结的快慢、荷载作用下土体中有效应力随时间增加的情况、荷载作用下土体强度变化情况皆与土体的渗透性有关。

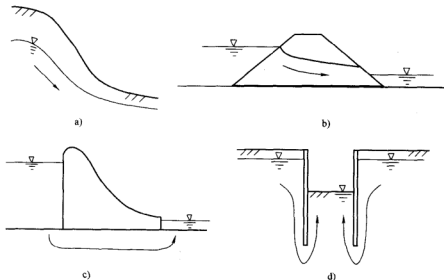


图 5-2 岩土工程中的渗流

a) 边坡渗流 b) 堤坝渗流 c) 地基渗流 d) 基坑渗流

5.2 土体渗流的基本定律

5.2.1 达西渗流定律

1. 饱和土

早在 1856 年, 法国工程师达西就提出了著名的达西渗流定律, 描述饱和土体在层流条件下渗透流速与水力坡降之间的关系, 表明渗流大小与渗透坡降成正比, 即

$$v = kJ = -k \frac{dh}{ds} \quad (5-3)$$

式中 v ——渗透流速;

J ——渗透坡降, 也称为水力梯度或水力坡降, 表示沿流程 s 的水头损失率;

k ——渗透系数, 表示单位水力坡降时的渗透流速。

式 (5-3) 中水头 h 是指总水头, 为压力水头和位置水头之和, 压力水头表示考察点的水能够在测压管中上升的高度, 位置水头是指考察点相对于基准面的高度。

值得指出的是, 这里所指的渗透流速实际上是一种假想的流速, 是过水断面上的平均流速, 而不是流体通过孔隙的真实流速。

将达西定律推广到各向异性介质中, 则有

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5-4)$$

其中 k_{ij} 称为渗透张量, 具有对称性, 即 $k_{ij} = k_{ji}$, 当 x 、 y 、 z 为主渗透方向时有 $k_{xy} = k_{yx} = 0$, $k_{xz} = k_{zx} = 0$, $k_{zy} = k_{yz} = 0$ 。

将式 (5-3) 和式 (5-4) 统一可写成如下向量形式, 即

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k} \cdot \nabla h$$

2. 非饱和土

非饱和土渗流中, 存在水和气两种流体, 属于两相流动问题, 它们具有不同的流动性质。当土变成非饱和状态时, 渗透性大为减小, 土体渗透性成为饱和度和体积含水率或基质吸力的函数。Richards 于 1931 年将达西定律推广到非饱和土中。为简便起见, 忽略气体的流动阻力, 仍可用层流时的达西定律表示为

$$v = k(\theta_w) J = -k(\theta_w) \nabla h \quad (5-5)$$

式中 $k(\theta_w)$ ——某一体积含水率 θ_w 下的非饱和土渗透系数。

式 (5-5) 与表示饱和渗流的 Darcy 定律 (5-3) 形式相同, 但其总水头 h 和渗透系数 k 却有着不同的含义和特点。对于非饱和渗流, 当不考虑溶质势、温度势以及气压势时, 任一点的总水头包括位置水头 z 和基质势水头 u_w/γ_w , 为了便于分析问题, 常常将采用 u_w/γ_w 统一表示饱和和压力势和非饱和基质势水头, 且统称为压力水头, 在饱和区 $u_w/\gamma_w > 0$, 在非饱和区 $u_w/\gamma_w < 0$, 在二者界面上 $u_w/\gamma_w = 0$ 。此外, 在饱和土中, 渗透系数主要受多孔介质孔隙比与孔隙连通性的影响, 当土体处于饱和状态时, 常常将渗透系数假设为常数。非饱和土体中部分孔隙水被气体填充, 故其渗透性低于该土体的饱和透水性, 它同时受到土体的孔隙比和饱和度 (或含水率) 变化的影响, 因而常常将渗透系数表达为饱和度和 S 、体积含水量 θ_w 或基质吸力的一函数 $k_w(\theta_w)$ 。

5.2.2 达西渗流定律的适用性

达西渗流定律是在层流假定前提下获得的。在水力学中, 通常采用雷诺数 Re 这样一个无量纲参数作为层湍流的判别条件, 众多研究表明, 雷诺数 Re 与水流速度、孔隙直径和水流运动粘滞系数有关, 当 Re 不超过 $1 \sim 10$ 时水流呈层流状态。因此, 人们常以 Re 是否超过 $1 \sim 10$ 作为达西渗流定律是否适用的判别标准。对于一般土体中的渗流, 雷诺数 Re 通常是小于 $1 \sim 10$ 的, 达西渗流定律是适用的, 但对于孔隙较大的堆石体和反滤排水体等材料, 当水力梯度较大时, 会偏离达西定律。此外, 在密实的粘土中, 由于颗粒表面吸着水的粘滞阻力作用, 在水力梯度较小时也会偏离达西定律。

5.3 饱和—非饱和土体渗流的基本方程

5.3.1 饱和土体渗流基本方程

1. 渗流连续性方程

根据质量守恒定律可推导出土体渗流连续性方程。考察图 5-3 所示微分单元体 $dx dy dz$, 由质量守恒定律, 知 dt 时间内流出和流进单元体的水量之和等于 dt 时间内单元体中水量的变化量, 因此可建立如下方程

$$\begin{aligned} & \rho_w [v_x dy dz + v_y dx dz + v_z dx dy] - \\ & \rho_w \left[\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right] \\ & = \frac{\partial (\rho_w dx dy dz)}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (5-6)$$

式中 n ——孔隙率;
 ρ_w ——水的密度。

由于

$$\frac{\partial(\rho_w dx dy dz)}{\partial t} dt = \rho_w (\alpha + n\beta) \frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz dt \quad (5-7)$$

式中 α ——土体体积压缩模量的倒数;
 β ——水的体积压缩模量的倒数;
 p ——孔隙水压力, 有 $p = \rho_w g (h - z)$, 则

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_w g \frac{\partial h}{\partial t}$$

因此, 可将式 (5-6) 进一步简化为

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho_w g (\alpha + n\beta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5-8)$$

其中 $S_s = \rho_w g (\alpha + n\beta)$ 称为单位储存量, 即单位体积的饱和土体内, 当下降 1 个单位水头时, 由于土体压缩和水的膨胀所释放出来的储存水量。

2. 稳定渗流基本方程

忽略土和水的压缩性, 将饱和土达西定律代入式 (5-8), 则得稳定渗流基本方程, 即

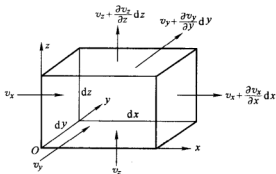


图 5-3 微分单元体示意图

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (5-9)$$

若土体为均质、各向同性介质, 则可简化为如下拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5-10)$$

3. 非稳定渗流基本方程

考虑土体和水的压缩性, 将饱和土达西定律代入式 (5-8), 得非稳定渗流基本方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5-11)$$

5.3.2 非饱和土体渗流的基本方程

对于非饱和土体,孔隙中流体由水和气两相组成,如果只考察水体,根据流入与流出单元土体的水量差等于水体积的变化量,仍可建立如下非饱和土体渗流连续性方程

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta_w}{\partial t} \quad (5-12)$$

将非饱和土渗流达西定律代入,可建立如下非饱和土体渗流基本方程

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{wx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{wy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{wz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta_w}{\partial t} \quad (5-13)$$

假设总应力与孔隙气应力对时间的导数为零,则有

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = -m_2^w \frac{\partial u_w}{\partial t} \quad (5-14)$$

式中 m_2^w ——与基质吸力变化有关的水的体积变化系数。

则式(5-13)成为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{wx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{wy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{wz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = m_2^w \rho_w g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5-15)$$

对于稳定渗流,则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{wx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{wy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{wz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (5-16)$$

非饱和土体的渗流方程从形式上来看与饱和土体完全类似,但所不同的是,非饱和土体渗透系数不是常数,是随着点的位置变化而变化的,为所在点的体积含水率或饱和度或基质吸力的函数,将式(5-16)进一步展开,可以得到如下非线性方程

$$\frac{\partial k_{wx}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k_{wy}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial k_{wz}}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} + k_{wx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{wy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_{wz} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5-17)$$

5.3.3 定解条件

每一流动过程都是在限定的空间流场内发生的。沿这些流场边界起支配作用的条件称之为边界条件。研究开始时流场内的整个流动状态或流动支配条件称之为初始条件。边界条件和初始条件一起统称为定解条件。求解非稳定渗流方程时,需要同时考虑初始条件和边界条件。

边界条件可以分为以下三类:

第一类边界条件为边界上给定水头分布,或称为水头边界条件,此已知边界条件可以写为

$$h|_{\Gamma_1} = H_1(x, y, z, t) \quad (5-18)$$

第二类边界条件为在边界上给定水头的法向导数，或称为流量边界条件，此边界条件可以写为

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = -\frac{v_n}{k} = H_2(x, y, z, t) \quad (5-19)$$

考虑到各向异性时，还可以写为

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial h}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial h}{\partial z} l_z + q = 0 \quad (5-20)$$

上式中的 q 为单位面积边界上穿过的流量，相当于 v_n ； l_x ， l_y ， l_z 为外法线 n 与坐标间的方向余弦。

第三类边界条件为混合边界条件，是指含水层边界的内外水头差和交换的流量之间保持一定的线性关系，即

$$h + \alpha \frac{\partial h}{\partial n} = \beta \quad (5-21)$$

式中 α ——正常数，它和 β 都是此类边界各点的已知数。

初始条件为

$$h(x, y, z, t)|_{t=0} = h_0(x, y, z) \quad (5-22)$$

基于饱和理论求解非稳定渗流问题时，变动的渗流自由面边界 (Γ_4) 除了要满足第一类边界条件

$$h^* = z \quad (5-23)$$

外，还应满足第二类边界条件的流量补给关系，其表达式为

$$q = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \cos \theta \quad (5-24)$$

式中 μ ——饱差 (自由面上升) 或给水度 (自由面下降)，它表示在自由面改变单位高度下，从含水层单位截面积上吸收或排出的水量，是无量纲数；

θ ——自由面 Γ_4 外法线方向与垂线的交角。

现以图 5-4 所示均质各向同性堤坝渗流为例，其边界条件为：AB 和 FG 为已知水头边界 Γ_1 ，在该边界面上， $h = \text{常数}$ ；AG 为不透水边界 Γ_2 ，在该边界上， $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ ，是流面；EF 为出渗面边界 Γ_3 ，在该边界上，要同时满足两个条件，即：

$$h|_{\Gamma_3} = z \text{ 和 } k \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma_3} \leq 0, \text{ BE 为自由面边界 } \Gamma_4, \text{ 在该边界上，也要同时满足两个}$$

条件，即： $h|_{\Gamma_4} = z$ 和 $k \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma_4} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} l_z$ 。

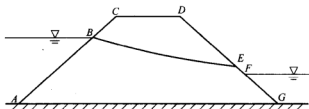


图 5-4 堤坝渗流问题边界条件示意图

因此，基于饱和理论求解非稳定渗流问题时，边界条件将变得十分复杂，尤其是渗流自由面边界，它是一个不确定的边界，显示出强烈的非线性，目前传统的方法是用迭代法来求解，况且在非稳定渗流问题中，自由面是随着时间的变化而改变的，这就更加增加了问题的难度。

基于饱和 - 非饱和理论进行渗流分析时，可以将定解条件方程统一表达为

$$\left. \begin{aligned} h(x, y, t) &= H_1(x, y, t), (x, y) \in \Gamma_1 \\ k_{wx} \frac{\partial h}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + k_{wy} \frac{\partial h}{\partial y} \cos(\vec{n}, y) &= q_n(x, y, t), (x, y) \in \Gamma_2 \\ h(x, y, t) &= z(x, y, t), (x, y) \in \Gamma_3 \\ h(x, y, t_0) &= H_0(x, y, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

式中 Γ_1 ——水头分布规律已知的边界；

Γ_2 ——流量已知的边界；

q_n ——单位时间边界法向流量， $\cos(\vec{n}, x)$ ， $\cos(\vec{n}, y)$ 等于边界面外法线方向的方向余弦；

Γ_3 ——渗出面边界；

z ——渗出面节点坐标；

H_0 ——初始时刻的水头值，称为初始条件。

对于图 5-4 所示堤坝，基于饱和 - 非饱和理论的渗流边界条件成为：AB 和 FG 是水头为已知常数边界；AG 是不透水流量边界；BC、CD 和 DE 是流量边界条件；EF 是渗出面边界， $h = z$ 。在降雨入渗过程中，雨水的人渗速率与降雨强度和土体的人渗能力有关，当降雨强度大于土体的最大入渗率时，地表出现积水，未能渗入土体的雨水以地表径流形式流走。考虑降雨入渗边界条件时可按下述方法处理：如果雨强小于表层土体的渗透性，按流量边界条件处理；如果雨强大于表层土体的渗透性，一部分雨水沿坡面形成径流，按定水头边界处理。

5.4 岩土渗流问题的有限元解法

求解渗流问题的方法总体有解析法、数值法和电模拟法三类。解析法比较精

确, 但只能解决一些简单的问题。随着计算机技术的迅速发展, 数值解法愈来愈得到广泛的应用。数值解法主要包括有限单元法、有限差分法、边界元法、有限体积法、有限分析法及杂交元法等。由于有限元法在模拟复杂曲线边界和非均质各向异性渗透介质方面有一定的灵活性, 使之成为求解渗流问题的一种最为常用的数值解法, 本节分别针对二维问题、三维问题和轴对称问题对该法作一简要介绍。为简便起见, 这里以饱和土体稳定渗流为例。

5.4.1 渗流问题有限元解法的基本思路

求解渗流问题的有限元解法的基本思路为:

1) 首先将渗流区域离散成若干有限单元的组合体, 通常称各单元的连接点为结点;

2) 选取恰当的形函数, 用以表征水头在单元内的分布规律, 试图通过单元结点的水头值来描述单元内任一点的水头。

设单元共有 n 个结点, 第 i 结点处的水头为 h_i , 则单元内任一点的水头 h 可以表示为

$$h = \sum_{i=1}^n N_i h_i \quad (5-26)$$

其中 N_i 为形函数,

3) 从渗流问题满足的基本微分方程的定解和条件出发, 采用变分法或加权余量法等, 建立单元结点水头满足的单元支配方程。

4) 对单元支配方程进行整体组装, 建立以渗流区域内所有结点水头为未知值的整体有限元方程组, 对方程组求解, 即可得结点水头值, 从而获得整个渗流区域内的水头分布情况。

5.4.2 二维稳定渗流的有限元解法

1. 二维稳定渗流基本方程和定解条件

由上节可知, 对二维稳定渗流, 其基本方程可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (5-27)$$

方程 (5-27) 的求解尚需结合一定的定解条件, 这里指边界条件。渗流边界条件通常有三类: 第一类为水头边界条件, 指边界上给定水头, 即 $h|_{\Gamma_1} = \bar{h}$; 第

二类为流量边界条件, 指边界上给定流量, 即 $k_x \frac{\partial h}{\partial x} l + k_y \frac{\partial h}{\partial y} m \Big|_{\Gamma_2} = \bar{q}_n$ (其中 l 、 m 为边界法向余弦); 第三类为混合边界条件, 指含水层边界的内外水头差和交

换的流量之间保持一定的线性关系, 即: $h + \alpha \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} l + k_y \frac{\partial h}{\partial y} m \right) \Big|_{\Gamma_3} = \beta$ (其中 α 、 β 为常数)。在上述三类边界条件中, 第一类和第二类是常遇边界。

2. 有限元方程的建立

从方程 (5-26) 出发, 以形函数 N_i 为权函数, 采用加权余量法, 则可建立如下方程

$$\int_{\Omega^e} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (5-28)$$

对式 (5-28) 进行分部积分, 并将式 (5-26) 和第二类边界条件代入, 则可建立如下单元支配方程

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n k_{ij} h_j &= F_i \\ k_{ij} &= \int_{\Omega^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\ F_i &= \int_{\Gamma^e} N_i \bar{q}_n d\Gamma \end{aligned} \quad (5-29)$$

其中 Γ^e 为单元边界, Ω^e 为单元区域。

k_{ij} 和 F_i 的计算可采用高斯积分法求得。

5.4.3 三维稳定渗流的有限元解法

1. 三维稳定渗流基本方程和定解条件

三维稳定渗流基本方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (5-30)$$

三维稳定渗流问题的边界条件为

水头边界 $h|_{\Gamma_1} = \bar{h}$

流量边界 $k_x \frac{\partial h}{\partial x} l + k_y \frac{\partial h}{\partial y} m + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n \Big|_{\Gamma_2} = \bar{q}_n$ (其中 l 、 m 、 n 为边界法向余弦)

2. 有限元方程的建立

从方程 (5-52) 出发, 以形函数 N_i 为权函数, 采用加权余量法, 则可建立如下方程

$$\int_{\Omega^e} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right] dx dy dz = 0 \quad (5-31)$$

对式 (5-31) 进行分部积分, 并将式 (5-26) 和第二类边界条件代入, 则可建立如下单元支配方程

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} h_j = F_i \quad (5-32)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy$$

$$F_i = \int_{\Gamma^e} N_i \bar{q}_n d\Gamma$$

5.4.4 轴对称稳定渗流的有限元解法

在岩土工程中, 常常会遇到轴对称渗流问题, 如井的渗流等, 此时采用柱面坐标系较为方便, 设径向为 r , 环向为 θ , 竖向为 z , 则可建立如下的达西渗流定律

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -k_r \frac{\partial h}{\partial r} \\ v_\theta &= -k_\theta \frac{\partial h}{r \partial \theta} \\ v_z &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5-33)$$

对于轴对称问题, 由于各参数沿环向不发生变化, 则根据质量守恒定律, 可建立如下的渗流微分方程

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5-34)$$

即

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} k_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (5-35)$$

轴对称渗流问题边界条件为

水头边界 $h|_{\Gamma_1} = \bar{h}$

流量边界 $k_r \frac{\partial h}{\partial r} n_r + k_z \frac{\partial h}{\partial z} n_z \Big|_{\Gamma_2} = \bar{q}_n$ (其中 n_r 、 n_z 为边界法向余弦)

由于只需对轴对称平面区域进行离散, 因此轴对称问题的区域离散和形函数选取的方法同二维问题。

按前述同样方法, 采用伽辽金有限元法, 可建立如下轴对称问题的单元支配方程

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} h_j = F_i \quad (5-36)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega^e} \left(k_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) r dr d\theta$$

$$F_i = \int_{\Gamma^e} N_i \bar{q}_n d\Gamma$$

5.5 流网及其应用

由渗流基本方程,再结合一定的边界条件和初始条件,就可以通过某种数学手段如有限元法,求得渗流场中任一点水头的分布。为了直观地描绘出土体渗流的总体轮廓,通常将最后的计算结果转化为流网来表示。流网是渗流分析的一个十分有用的手段。

5.5.1 流网的特征

流网是由二簇曲线交织而成的网格,一簇为流线,一簇为等势线。流线指示着渗流的方向,表示水质点渗流的路径。等势线是渗流场中水头相等的点的连线,也称为等水头线。流网中相邻等势线间的水头损失是相同的。

对于均质各向同性土体,流网具有如下特征:

- 1) 流线与等势线正交。
- 2) 每个网格的长宽比相同。
- 3) 各流槽的渗流量相等。

但对于非均质土体或各向异性土体来说,其渗流流网性质将发生变化。图 5-5 所示为一船坞的均质各向同性地基的渗流流网图,图 5-6 所示为一船坞的非均质各向同性地基的渗流流网图,图 5-7 为一闸基的各向异性渗流场流网图。对于非均质体,由于土体渗透性不同,为使流量保持不变,渗透性小的区域的水力坡降必将大于渗透性大的区域,因此当渗流从低渗透性区流向高渗透性区时,相邻等势线间的距离将变宽,使网格变得狭长,流线和等势线在区域分界面也将发生偏转。对于各向异性土体,其等势线和流线则不再保持正交。

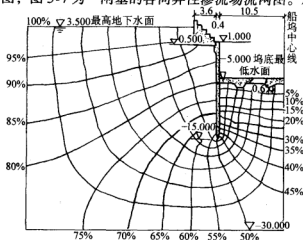


图 5-5 船坞均质各向同性地基渗流流网图 (单位: m)

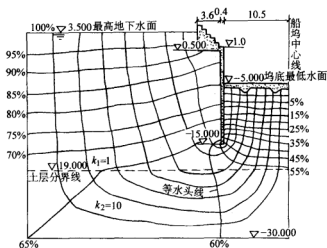


图 5-6 船坞非均质各向同性地基渗流流网图 (单位: m)

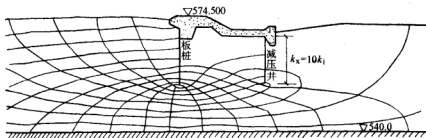


图 5-7 闸基的各向异性渗流场流网图 (单位: m)

5.5.2 流网的应用

利用流网一方面可以定性地判别土体渗流的总轮廓, 图 5-8 所示为一不透水挡水建筑物的无限深地基渗流流网图, 可以看出, 愈接近挡水建筑物底部, 流线愈密集, 表明该处的水力坡降愈大, 渗透速度也愈大; 而远离挡水建筑物底部, 流线愈稀, 则水力坡降愈小, 流速也愈小。另一方面, 根据流网还可以定量地计算出渗流场中各点的水头、水力坡降、渗流量、孔隙水应力和渗流力等物理量。

下面以图 5-8 所示地基渗流流网为例, 介绍由流网定量计算各物理量的方法。

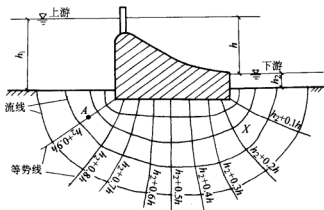


图 5-8 地基中的渗流流网

1. 水头的计算

设挡水建筑物上游水位为 h_1 ，下游水位为 h_2 ，水经地基由上游流至下游，产生的总水头损失为 $\Delta h = h_1 - h_2$ 。由于等势线的间隔数为 10，所以相邻两等势线间的水头损失为 $0.1\Delta h$ 。若以地基表面为基准面，则容易得到各条等势线上的水头值，见图 5-8 所示。

2. 孔隙水应力和有效应力的计算

现考察离地基表面深度为 z 的 A 点。显然 A 点的水头值为

$$h = h_2 + 0.9\Delta h \quad (5-37)$$

A 点的测压管水柱高度为

$$h_w = z + h = z + h_2 + 0.9\Delta h \quad (5-38)$$

则该点的孔隙水应力为

$$u = \gamma_w h_w = \gamma_w (z + h_2 + 0.9\Delta h) \quad (5-39)$$

设地基土体的饱和重度为 γ_{sat} ，则 A 点的总应力为

$$\sigma = \gamma_{sat} z + \gamma_w h_1 \quad (5-40)$$

因此，根据有效应力原理，A 点的有效应力为

$$\sigma' = \sigma - u = \gamma' z + 0.1\Delta h \times \gamma_w \quad (5-41)$$

3. 水力坡降和渗流力的计算

现考察流网网格 X，设网格 X 的平均渗径长度为 ΔL ，两流线间的平均距离为 b ，则平均水力梯度为

$$i = \Delta h / \Delta L \quad (5-42)$$

渗流力为

$$j = \gamma_w i = \gamma_w \frac{\Delta h}{\Delta L} \quad (5-43)$$

作用在该网格上的总渗流力为

$$J = \gamma_w \frac{\Delta h}{\Delta L} b \Delta L = \gamma_w b \Delta h \quad (5-44)$$

4. 渗流量的计算

设土体的渗透系数为 k ，根据达西定律可得通过网格 X 的平均渗流量为

$$q = k_i \Delta L = k \Delta h \quad (5-45)$$

此外，根据流网还可以进行流土的判别。

5.6 饱和土体渗透系数的确定方法

渗透系数是描述土体渗透性的重要指标，对渗流计算结果的重要性和渗流控制方案的合理性有重要的影响。确定渗透系数的方法主要有经验估算法、室内试验法、现场试验法和参数反演法。

5.6.1 经验估算法

土体渗透系数的变化范围很大，由粗砾到粘土，随着粒径和孔隙的减小，其渗透系数可由 1.0 降低到 10^{-9} 。对于砂性土，太沙基曾提出如下的经验公式进行估算，即

$$k = 2d_{10}^2 e^2 \quad (5-46)$$

式中 k ——渗透系数 (cm/s)；

d_{10} ——有效粒径 (mm)；

e ——土体孔隙比。

几种土渗透系数参考值见表 5-1。

表 5-1 渗透系数经验参考值

土 类	渗透系数/(cm/s)	土 类	渗透系数/(cm/s)
粗 砾	$10^0 \sim 5 \times 10^{-1}$	粉 土	$10^{-3} \sim 10^{-4}$
砂质砾	$10^{-1} \sim 10^{-2}$	粉质粘土	$5 \times 10^{-6} \sim 10^{-4}$
粗 砂	$5 \times 10^{-2} \sim 10^{-2}$	粘 土	$< 5 \times 10^{-6}$
细 砂	$5 \times 10^{-3} \sim 10^{-3}$		

5.6.2 室内试验法

室内测定渗透系数的方法按原理分有常水头法和变水头法两种。从取土坑中取土样或钻孔取样，即可在室内进行渗透系数的测定。

1. 常水头法

常水头法是整个试验过程中,水头保持不变,适用于透水性较大的无粘性土,其试验装置如图 5-9 所示。

设试样厚度为 L , 截面积为 A , 试验时的水位差保持为 h , 用量筒和秒表测得 t 时段内流经试样的水量为 V , 则根据达西定律有

$$V = kiAt = k \frac{h}{L} At \quad (5-47)$$

于是, 渗透系数为

$$k = \frac{VL}{Aht} \quad (5-48)$$

2. 变水头法

变水头法试验装置如图 5-10 所示。与常水头试验不同, 其试样的一端与细玻璃管相连, 在整个试验过程中, 水头是随着时间变化的, 它适用于透水性较小的粘土。

设细玻璃管内截面积为 a , t 时刻细玻璃管中的水位为 h , 经 dt 时段, 水位下降 dh , 则经 dt 时段流经试样的水量为

$$dV = -adh \quad (5-49)$$

同时, 根据达西定律, 在时段 dt 内流经试样的水量为

$$dV = k \frac{h}{L} Adt \quad (5-50)$$

因此, 有

$$adh = -k \frac{h}{L} Adt \quad (5-51)$$

将上式两边积分, 并设时刻 t_1 和 t_2 对应的水头差分别为 h_1 和 h_2 , 则可得渗透系数的表达式为

$$k = \frac{aL}{A(t_2 - t_1)} \ln \frac{h_1}{h_2} \quad (5-52)$$

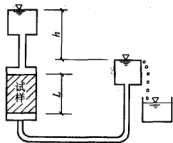


图 5-9 常水头试验装置示意图

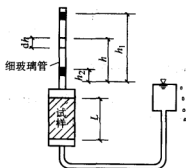


图 5-10 变水头试验装置示意图

5.6.3 现场试验法

室内测定土体渗透系数时, 由于所取土样大小有一定的限制, 难以完全代表现场土体的真实情况, 如有可能忽视了土中的裂缝等, 所以对于较重要的工程,

最好进行现场试验。现场确定渗透系数的试验方法主要有抽水试验法和注水（压水）试验法。

1. 抽水试验

抽水试验是现场测定渗透系数的常用方法，根据抽水试验时水量、水位与时间关系，分稳定流抽水试验和非稳定抽水试验。在土体渗透系数测量中，主要采用稳定流抽水试验。其基本原理是从抽水试验孔（如钻孔）中抽水，如图 5-11 所示，直至原来水平的地下水位面（虚线）逐渐下降形成一个稳定的降水漏斗（实线），再利用抽水流量与孔中水位的关系，进行渗透系数的计算。

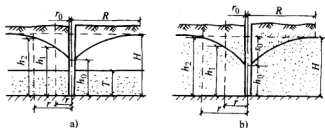


图 5-11 抽水试验示意图

a) 承压含水层 b) 无压含水层

设抽水流量（等于流入抽水试验孔的流量）为 Q ，原地下水位为 H ，试验孔半径为 r_0 ，孔中水位为 h_0 ，由于孔中抽水产生的影响区域半径为 R ，则根据水流连续性，即流过任一半径 r 处断面的流量等于抽水流量，和达西渗流定律，有

$$Q = k \cdot 2\pi r h \frac{dh}{dr} \quad (\text{无压含水层}) \quad (5-53)$$

$$\text{或} \quad Q = k \cdot 2\pi r T \frac{dh}{dr} \quad (\text{承压含水层}) \quad (5-54)$$

即有

$$\int_{n_0}^H h dh = \frac{Q}{2\pi k} \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} \quad (\text{无压含水层}) \quad (5-55)$$

$$\text{或} \quad \int_{n_0}^H dh = \frac{Q}{2\pi k T} \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} \quad (\text{承压含水层}) \quad (5-56)$$

积分并整理，得

$$k = \frac{Q}{\pi(H^2 - h_0^2)} \ln \frac{R}{r_0} \quad (\text{无压含水层}) \quad (5-57)$$

$$k = \frac{Q}{2\pi T(H - h_0)} \ln \frac{R}{r_0} \quad (\text{承压含水层}) \quad (5-58)$$

可以看出, 式 (5-57) 和式 (5-58) 的关键是影响半径 R 的确定, 可按经验估算, 如当孔中水位降深 $S_0 = H - h_0$ 为数米时, 对于粉质粘土 $R = 20 \sim 50\text{m}$, 粉细砂 $R = 50 \sim 100\text{m}$, 中粗砂 $R = 100 \sim 200\text{m}$, 也可参用下列经验公式

$$\text{库沙金公式} \quad R = 2S_0 \sqrt{Hk} \quad (5-59)$$

$$\text{席恰特公式} \quad R = 10S_0 \sqrt{k} \quad (5-60)$$

式中 k ——渗透系数 (m/d)。

由于影响半径 R 的确定近似性较大, 如果需较准确地求得渗透系数, 还需在试验孔周围布置一些观测孔。设观测孔离试验孔中心距离为 r_1 , 观测孔水位为 h_1 , 则将半径 r_1 及对应的水位 h_1 代替式 (5-57) 和式 (5-58) 中影响半径 R 及对应水位 H , 可得

$$k = \frac{Q}{\pi(h_1^2 - h_0^2)} \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (\text{无压含水层}) \quad (5-61)$$

$$k = \frac{Q}{2\pi T(h_1 - h_0)} \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (\text{承压含水层}) \quad (5-62)$$

如果有两组观测孔, 离试验孔中的距离分别为 r_1 和 r_2 , 水位分别为 h_1 和 h_2 , 则有

$$k = \frac{Q}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{无压含水层}) \quad (5-63)$$

$$k = \frac{Q}{2\pi T(h_2 - h_1)} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{承压含水层}) \quad (5-64)$$

需说明的是, 以上渗透系数公式都是针对抽水试验孔为完整孔建立的, 即抽水试验孔的深度达到含水层底部, 并且含水层的整个厚度中孔壁都是透水的, 如果抽水试验孔为非完整孔, 即抽水试验孔的深度未达到含水层底部, 则不能采用上述公式进行渗透系数的计算。目前非完整孔的计算公式, 计算精度都较差, 只有当含水层厚度较大时, 为节约投资才采用非完整孔。关于非完整孔的渗透系数计算公式, 对于承压含水层, 有古林斯基公式、巴布什金公式、阿尔占诺夫公式、英格尔公式、陈济生公式、吴世余公式、毛昶熙公式等, 对于无压含水层, 有扎马林-佛希海默公式等等, 这里不作一一介绍, 可参见参考文献 [1]。

2. 注水试验

注水试验装置见图 5-12。注水试验的原理与抽水试验相似, 只是以注水代替抽水, 连续向试验孔内注水, 直至形成稳定的水位和注入量, 再以此数据进行土体渗透系数的计算。

当在巨厚且水平分布较宽的含水层中作常流量注水试验时,可按式计算渗透系数:

当 $l \leq 4r$ 时

$$k = \frac{0.08Q}{r_0 S \sqrt{\frac{l}{2r_0} + \frac{1}{4}}} \quad (5-65)$$

当 $l > 4r$ 时

$$k = \frac{Q}{2\pi l S} \ln \frac{2l}{r_0} \quad (5-66)$$

式中 l ——试段或过滤器长度;

S ——注水造成的水头高度;

Q ——稳定注水量;

r_0 ——钻孔半径或过滤器半径。

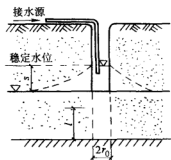


图 5-12 钻孔注水试验装置示意图

以注水试验计算出的渗透系数一般比用抽水试验得出的渗透系数要小 15% ~ 20%, 这是由于注水试验可能使土中孔隙堵塞, 从而使测得的渗透系数偏低, 而抽水试验可能使土中的细粒土发生潜蚀, 从而使测定的渗透系数偏高。因此, 有时采用式 (5-67) 进行土体渗透系数的近似:

$$k = \sqrt{k_i k_p} \quad (5-67)$$

式中 k_p ——抽水试验测得的渗透系数;

k_i ——注水试验测得的渗透系数。

5.6.4 参数反演法

反演法是根据地下水位观测资料, 通过数学手段反求参数的一种方法。总体可分为直接法和间接法两大类。

直接法是直接从联系水头和待定参数的偏微分方程或其离散形式出发, 把水头的实际观测值作为已知数代入方程, 求出参数。直接法由于对观测资料的要求过高, 而且计算稳定性较差, 应用不广。

间接法是利用正问题的解是适定的这一重要性质, 把解逆问题化为解一系列的正问题, 具体做法是假设渗透系数初值, 通过数值分析计算出水头分布, 根据计算值与实测值之间的误差, 不断修改所假定的渗透系数, 反复计算水头, 直至水头的计算值与实测值之间的误差小于某一精度要求时为止, 此时的渗透系数即为所考察土体的渗透系数。

间接法的一重要环节是如何建立恰当的目标函数, 即水头观测值与计算值之间拟合程度的评判标准。通常采用最小二乘法, 得如下的目标函数

$$E(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n [H_i^C(k_1, k_2, \dots, k_n) - H_i^O]^2 \quad (5-68)$$

式中 k_1, k_2, \dots, k_n ——渗透系数;

H_i^C ——第 i 个观测点的水头计算值;

H_i^O ——第 i 个观测点的水头观测值。

如此,即将反演问题转化为如何寻找使目标函数达到极小时的渗透系数,此属于最优化问题。求解最优化问题的方法很多,常用的有一维寻查法、非线性最小二乘法、单纯形法、共轭梯度法、遗传算法等。

间接反演法的流程如图 5-13 所示。

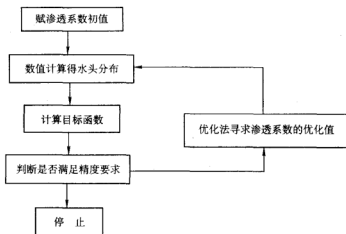


图 5-13 间接反演法流程示意图

5.7 非饱和土体渗透特性

非饱和土体渗透系数除与土体的种类、土体孔隙状态、流体的性质有关外,还与土体饱和程度密切相关,饱和土体渗透系数可以假定为常数,但对于非饱和土体,渗透系数往往小于饱和土体,渗透系数不再是常数,是随饱和度和体积含水量(定义为土中水的体积与土体总体积之比)而变化的,饱和度和体积含水量的变化往往引起基质吸力(孔隙气应力与孔隙水应力的差)的改变,因此常常将渗透系数表征为饱和度、体积含水量或基质吸力的函数。渗透系数—体积含水量—基质吸力的关系或渗透系数—饱和度—基质吸力的关系的确定成为研究非饱和土体渗流问题的关键,也是研究非饱和土固结问题的主要参数之一。

5.7.1 渗透系数—体积含水率—基质吸力的关系

当土体处于饱和状态时,体积含水量为饱和含水率,基质吸力为零,若对土

体施加微小的吸力, 土体中尚无水排出, 则含水率维持饱和值, 当吸力增加至某一临界值后, 由于土体中最大孔隙不能抗拒所施加的吸力而继续保持水分, 于是土体中始排水, 相应的含水率开始减小。饱和土体开始排水意味着空气随之进入土中, 故称该临界值为进气吸力, 或进气值。当基质吸力超过进气值继续增大时, 土体中的水开始首先从大的孔隙再由小的孔隙逐渐排出, 但当吸力很高时, 只有十分狭小的孔隙中才能保持有限的水分, 当含水率减小到某一临界值后, 吸力的增加不再引起体积含水率的减小, 称该临界含水率为剩余含水率。体积含水率与基质吸力的关系曲线是描述土体的重要性质, 也称为水分特征曲线, 如图 5-14 所示。不同土体的水分特征曲线是不同的, 一般说, 土体的粘粒含量愈高, 同一吸力条件下土的含水率愈高。特征曲线还受土结构的影响, 土壤愈密实, 则大孔隙相对愈少, 小孔隙相对愈多, 因此同一吸力条件下, 干重度大的土相应的含水率一般也大。这种关系在低吸力时尤为明显。

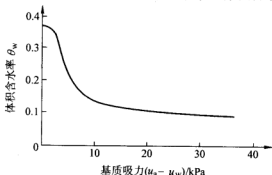


图 5-14 土体水分特征曲线

率一般也大。这种关系在低吸力时尤为明显。

下面介绍几种常见的模型:

1. 常用的经验公式

$$u_a - u_w = \alpha \theta^b \quad (\text{或} \quad u_a - u_w = a(\theta/\theta_s)^b) \quad (5-69)$$

或

$$u_a - u_w = A(\theta_s - \theta)^n / \theta^m \quad (5-70)$$

式中 基质吸力 ($u_a - u_w$) 的单位常用 Pa;

θ_s ——饱和含水率;

a 、 b 、 A 、 m 、 n ——相应的经验常数。

在低含水率拟合效果比较好, 由于经验常数无法赋予一定的物理意义故不能称之为数学模型。

2. Brooks-Corey 模型

$$u_a - u_w = (u_a - u_w)_b \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-1/\lambda} \quad (5-71)$$

式中 $u_a - u_w$ ——基质吸力;

$(u_a - u_w)_b$ ——进气值;

λ ——拟合的经验参数, 反映土体孔径的分布特征;

θ ——体积含水率;

θ_s 和 θ_r ——饱和含水率和残余含水率。

3. Van Genuchten 模型

$$\theta = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + \left(\frac{u_a - u_w}{\alpha}\right)^n\right]^m} \quad (m = 1 + 1/n) \quad (5-72)$$

式中 α 、 m 、 n ——非线性回归系数； θ_s 、 θ_r 同前。

4. Fredlund 模型

$$\theta = \left[1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{u_a - u_w}{(u_a - u_w)_r}\right)}{\ln(1 + 1\,000\,000)/(u_a - u_w)_r}\right] \frac{\theta_s}{\ln[e + (u_a - u_w)/(u_a - u_w)_b]^n} \quad (5-73)$$

式中 $(u_a - u_w)_b$ ——土体进气值；

m 、 n ——经验参数；

$(u_a - u_w)_r$ ——残余含水率对于的基质吸力，取 1500kPa。

Childs 和 Collis-George (1950) 曾利用充水孔隙空间的形状建议了一种渗透系数与体积含水率的关系曲线，将 $k_w(\theta_w)$ 描述成级数形式，再代入水分特征曲线，从而建立级数形式的渗透系数与基质吸力的关系。

但需注意的是，体积含水率与基质吸力的关系曲线是和含水率的变化过程有关的，当土体含水率变化为干燥过程时，与浸湿过程相比有滞后现象（见图 5-15），因此渗透系数与基质吸力的关系曲线也表现出滞后，在模拟土体的非饱和渗透特性时需考虑这一特点。如果直接采用渗透系数与体积含水率之间的关系，无滞后现象，则为单值函数。

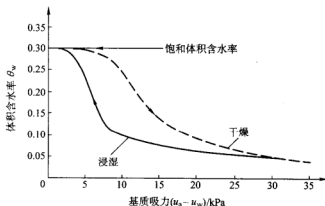


图 5-15 体积含水率与基质吸力关系的滞后特征

5.7.2 渗透系数—饱和度—基质吸力的关系

与体积含水率相同,当土体的饱和度低于某一饱和度后,基质吸力的增加并不引起饱和度的显著变化,称该临界饱和度为剩余饱和度,如图 5-16 所示,因此常常采用有效饱和度来描述土体的饱和状态,定义为

$$S_e = \frac{S - S_r}{1 - S_r} \quad (5-74)$$

式中 S_r 为剩余饱和度,即能使基质吸力起作用的最小饱和度。粘土的 S_r 常常大于砂土的 S_r 。

图 5-17 给出了典型的土体基质吸力与有效饱和度的关系曲线,可以看出,在双对数坐标系中,有效饱和度与基质吸力的关系可以近似描绘为一水平线和一斜直线组成,可以用如下模型近似代替

$$S_e = \begin{cases} 1 & \text{当 } (u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b \\ \left[\frac{(u_a - u_w)_b}{(u_a - u_w)} \right]^\lambda & \text{当 } (u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (5-75)$$

式中 $(u_a - u_w)_b$ 为土的进气值,是指空气进入土孔隙时必须达到的基质吸力值,即为图 5-17 中斜直线与饱和坐标的交点。 λ 为孔隙大小分布指标,定义为有效饱和度 S_e 与基质吸力 $(u_a - u_w)$ 曲线的负斜率。粘土的 $(u_a - u_w)_b$ 常常大于砂土,而 λ 常常小于砂土。

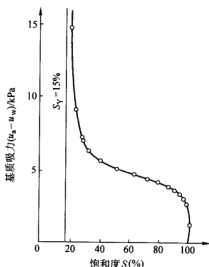


图 5-16 基质吸力与饱和度的关系曲线

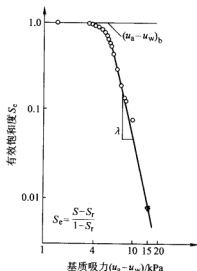


图 5-17 有效饱和度与基质吸力的关系曲线

Brooks 和 Correy (1964) 从基质吸力与饱和度关系曲线预测渗透系数与饱和度的关系

$$k_w = \begin{cases} k_s & \text{当 } (u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b \\ k_s S_c^\delta & \text{当 } (u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (5-76)$$

式中 k_s 为饱和土的渗透系数, δ 为经验常数, $\delta = \frac{2+3\lambda}{\lambda}$ 。

从而建立渗透系数与基质吸力的关系式为

$$k_w = \begin{cases} k_s & \text{当 } (u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b \\ k_s \left[\frac{(u_a - u_w)_b}{(u_a - u_w)} \right]^\eta & \text{当 } (u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b \end{cases} \quad (5-77)$$

关于渗透系数与基质吸力的关系曲线还有其他模型, 这里不再作一一介绍。

参 考 文 献

- 1 毛昶熙主编. 渗流计算分析与控制. 北京: 中国水利电力出版社, 1990
- 2 Fredlund D. G., Soil Mechanics for unsaturated soils, Wiley Interscience, 1993
- 3 张喜发主编. 岩土工程勘察与评价. 吉林: 吉林科学技术出版社, 1995
- 4 卢廷浩, 非饱和土堆固结问题探讨. 成都科技大学学报, 1996. 1 (89): 21~28

第6章 土的本构关系

6.1 土的变形特性

本构模型是描述应力应变关系的数学模型,也称本构关系。土体的真实应力应变关系特性十分复杂,利用各种可能的试验手段揭示土的应力应变特性,再进行归纳推演并应用一定的理论方法建立土的本构模型。

室内和现场试验都揭示,土的应力应变关系呈现非线性和弹塑性特征,因此相应的本构模型也就有非线性模型和弹塑性模型两大类。特殊软土还将呈现流变特征,在模型中同时还应考虑流变因素,关于流变问题将在有关章节作专门讨论。不论建立何种模型,其原则是应尽可能反映土的应力应变关系本质。应该指出任何模型都借助于某些假定,这些假定应有足以支持的理论和试验依据。

土的应力应变关系是依据于各种试验所揭示并通过对试验资料的分析整理而建立的。土是极其复杂的材料,应力应变关系受多种因素影响,而且各因素之间还可能存在着复杂的耦合关系,没有试验为基础的本构模型就像空中楼阁。目前所使用的试验仪器主要包括:压缩仪、普通三轴仪、平面应变仪、真三轴仪、应力路径三轴仪、单剪仪等。应该认识到不论采用哪种仪器,试验总是在某些简化条件下,例如按某种应力状态、某种加载路径进行的,同时试验量也只能是有限的。试验总是有某种局限性的,难以全面模拟工程实际土体复杂的应力应变性态。因此,有必要通过有限的试验揭示土的应力应变基本特性,再引入土的本构模型理论建立数学模型,反映问题的实质将特定条件下的试验结果推广到一般,即土的本构模型。本节主要介绍土的应力应变状态的一些表达方法,以及前人已有试验成果所揭示的土的应力应变特性的一般规律,以期对土的应力应变特性及其描述有一定的认识。

6.1.1 应力应变状态表达

一点的应力应变状态必须在某应力应变空间加以描述或表达。我们都知道一点的应力应变状态可以用直角坐标系中的六个应力分量和六个应变分量描述,也可以用它们对应的张量或张量分解形式表达。由于主应力、主应变分别是一组应力状态、应变状态不变量,因此,由三个主应力、三个主应变的组合(相加或相乘)则可分别构成三个应力状态不变量(I_1, I_2, I_3)和三个应变状态不变量($I'_1,$

I_2, I_3 , 其中仅 $I_1 = \epsilon_v$ 常用); 如采用张量分解则对应地可构成三个偏应力不变量 (J_1, J_2, J_3) 和三个偏应变不变量 (J'_1, J'_2, J'_3)。土的应力应变是复杂的, 研究土的本构模型时为了方便讨论或叙述方便, 有时在某一应力应变空间讨论, 有时又在另一应力应变空间讨论, 例如主应力应变空间、广义应力应变空间、八面体应力应变空间等, 必要时又可能进行应力应变空间的转换。

主应力应变空间表达为

$$\{\sigma\} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T \quad (6-1)$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3]^T \quad (6-2)$$

广义应力应变空间表达为

$$\{\sigma\} = [p \quad q]^T \quad (6-3)$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_v \quad \epsilon_s]^T \quad (6-4)$$

式中 $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, 称为广义正应力或球应力;

$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3}J_2$, 称为广义剪应力;

$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, 为体积应变;

$\epsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J'_2}$, 称为广义剪应变。

八面体应力应变空间表达为

$$\{\sigma\} = [\sigma_{\text{oct}} \quad \tau_{\text{oct}}]^T \quad (6-5)$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_{\text{oct}} \quad \gamma_{\text{oct}}]^T \quad (6-6)$$

式中 $\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, 称为八面体法向应力或正应力;

$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}J_2$, 称为八面体剪应力;

$\epsilon_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$, 称为八面体法向应变或正应变;

$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}J'_2$, 称为八面体剪应变。

土体一点的应力应变状态除了描述其大小外, 还应描述其方向, 例如主应力空间中确定偏剪应力 τ 。在扁平面上作用方向的应力 Lode 角与应力 Lode 参数等, 详见弹塑性力学教程或有关专著。

6.1.2 非线性、弹塑性性质

单轴压缩和三轴压缩及拉伸试验都表明土的应力应变关系是非线性的, 对于松砂、正常固结粘土, 它们的应力应变曲线几乎没有直线段, 从加荷之始就呈现

明显的非线性特征,如图6-1所示。仅这一点就与金属、混凝土等坚硬材料有明显的不同。

土的应力应变关系之所以呈现非线性,是由于土体孔隙的存在,受力后土固体颗粒间的相互位置发生了调整,从而发生变形。当荷载卸除后,一部分能够恢复的变形称为弹性变形;一部分变形则不能恢复,称为塑性变形,这种塑性变形甚至可能占较大部分。如图6-2所示,三轴试验时当加荷至A点,然后卸荷至B点,OA为加荷曲线段,AB段为卸荷曲线,卸荷后能够恢复的应变是弹性应变 ϵ^e ,不能恢复的应变是塑性应变 ϵ^p ;如果再加荷,BC段为再加荷曲线,BC一般不与AB重合,而存在一个剪刀形的环,称为回滞环,回滞环的存在表示卸荷再加荷过程中能量被塑性变形所消耗。由图6-2还可见再加荷还会产生新的塑性变形,如果重复加荷、卸荷,回滞环将逐渐减小,也即塑性变形增量将逐渐减小。

图6-2所示的应力应变关系说明土是非线性、非弹性的,这正是土体应力变形的显著特征之一。另外,对于软粘土,它们有时还具有明显的流变性质,将在专门章节中讨论。

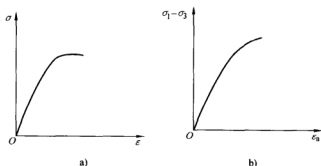


图6-1 材料的应力应变曲线

a) 金属 b) 土体

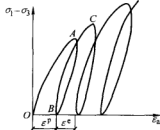


图6-2 土体加荷、卸荷应力应变曲线

6.1.3 体缩与体胀

由于土体孔隙的存在,土体受力(包括球应力、剪应力)时会产生明显的体积变形。这种体积变形包含弹性体积变形部分 ϵ_v^e 和塑性体积变形部分 ϵ_v^p 。

只要土体受到一球应力(静水压力)加载增量 Δp ,土体便会发生体积收缩增量即新的压缩变形。在单向压缩试验中就已经知道土体受到压缩时将发生体积收缩(体缩),这在其他试验中都同样发生。这种体缩同样包含弹性体缩变形和塑性体缩变形两部分,当球应力处于卸荷状态时,体缩变形中的弹性部分可以恢复,即土体将发生少量体变回弹,如图6-3所示。另外,球应力的变化会引起剪切刚度的变化,从而剪应变变化,这种耦合作用称为土的压硬性。

在剪应力作用下土体不但产生弹性剪应变和塑性剪应变，也将发生体缩或体胀变形现象，称为剪缩或剪胀，这是土体变形的一个重要特征，也是一种耦合作用。一般情况，土体在剪应力作用下应变增加，而且有可能发生剪缩或剪胀。如图 6-4a、b 所示。由于孔隙的存在，土体受剪时颗粒有相互错动位移的趋势，同时发生体积变形和剪切变形。对于松砂、正常固结粘土土体颗粒易于移动而填充到其临近的孔隙中，于是就发生剪切体缩现象；对于紧砂、超固结粘土，受剪时土体颗粒相互移动要滚越另一些颗粒而且常常出现叠架现象而不易填充到其临近的孔隙中，于是就出现剪胀现象。当剪应力处于卸荷状态时，土体的剪缩或剪胀变形也将发生少量回弹。

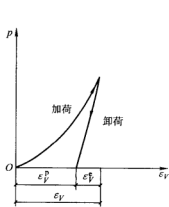


图 6-3 $p-\epsilon$ 曲线

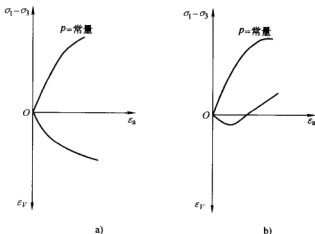


图 6-4 土体的剪缩与剪胀

a) 剪缩 b) 剪胀

6.1.4 硬化与软化

大量的三轴试验结果显示，轴向应力与轴向应变的关系曲线表现有两种形态。一种是应变硬化型，如图 6-5 所示，曲线 a 总是呈现上升的趋势直至破坏，软土和松砂一般表现为这种硬化型应力应变形态；另一种是应变软化型，如图 6-5 所示，曲线 b 先是呈现上升的趋势，当应力到达某峰值后又转为下降的趋势，即应力达到峰值后应力降低，而应变却在增加，直至破坏，超固结粘土和紧砂常表现为这种软化型应力应变形态。其他的试验，如直剪、单剪、扭剪等试验所得到的剪应力—

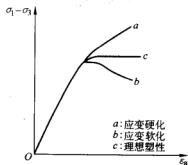


图 6-5 土体的硬化与软化

剪应变的关系曲线也有硬化型和软化型之别。另一种特殊变形性态称为理想弹塑性，如图 6-5 中的曲线 c 。

紧砂的颗粒排列紧密，当受剪时土体颗粒相互错动（剪切变形），同时伴随剪胀现象发生，土体颗粒必须克服颗粒间的“咬合力”才能相互错动，故表现为较高的抗剪强度。尔后颗粒间的这种相互“咬合力”因颗粒的滚落、棱角的破碎被逐渐克服，就表现为应变在增长但强度降低，于是曲线表现为应变软化型。超固结粘土在受剪过程中，其结构性强度（通常认为是颗粒间的粘结力）逐渐丧失（损伤），至峰值强度后结构性强度完全丧失，表现为应变软化。关于土的结构性描述和其损伤机理还有待进一步研究。

对于松砂和正常固结粘土，当受剪时，由于土体颗粒易于相互错动（剪切变形）而填充到其临近的孔隙中，并伴随剪缩，颗粒间结构变得更加紧密，表现在应变增加强度提高，故呈现应变硬化。

硬化与剪缩，软化与剪胀常有伴生现象，说明相互间有一定的联系，但也未必是必然的联系，也不一定是同步伴生的。试验也表明，软化型土往往是剪胀的，而剪胀土则不一定是软化的。对于应变软化型土，若用峰值强度设计，就意味着不允许土体有发生超过峰值强度所对应的应变，否则将降低土体的安全度。如果发生较大应变的区域不大或者允许局部区域达到剪切破坏，那么这部分区域将向其临近区域发生应力迁移，将降低土体的安全度，这时只需考虑适当加大安全储备即可。但如果设计时能够预测到有较大区域的土体将发生超过峰值强度所对应的应变，那么设计中就应考虑土体的软化问题并合理的选用强度指标。

6.1.5 应力路径对变形的影响

应力空间内土体单元应力状态点的移动轨迹称为应力路径，标志着某种加荷方式。应力路径可能是单调变化的，也可能是非单调的，甚至存在转折。试验表明，对土体按不同的应力路径加荷，由于岩土类材料受力变形后将发生显著的塑性变形，尽管初始应力状态和终了应力状态相同，但因各阶段的塑性变形增量不同，从而各阶段塑性变形增量累加起来的总量不同。这就是说，应力路径对土的应力应变有重要影响。

如图 6-6a，在 $p-q$ 平面上分别进行两种应力路径 ABD 、 ACD 试验，如图 6-6b，它们的应力应变曲线 $q-\epsilon_s$ 是不同的，在同一个应力增量下，这两种应力路径状态会得到不同的应变增量。历史上的应力路径称为应力历史，仅就有效应力的范畴而言，实际上应力历史是应力路径的一种说法，只是强调历史而已，图 6-7 可以说明应力历史对变形的影响。由于土的塑性变形不可恢复，卸荷时只发生回弹变形；再加荷时当应力未达到卸荷应力点之前，土体也只发生弹性变形，

当应力到达卸荷应力点之后,才又产生新的塑性变形;这就是为什么在同样应力增量下超固结土的变形比正常固结土的变形增量要小的缘故。

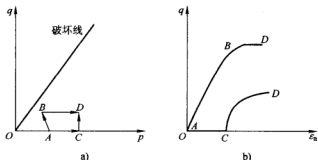


图 6-6 应力路径对变形的影响

a) 应力路径 b) 应力应变曲线

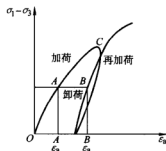


图 6-7 应力历史对变形的影响

6.1.6 围压(固结压力)对变形和强度的影响

常规三轴试验表明,对某些土,较高或较低的围压(固结压力 σ_3)对变形的影响是明显的,主要表现为:剪缩或剪胀,硬化或软化,强度包线呈非线性。

对于松砂、正常固结粘土,较高或较低的围压下,土体受剪时一般均发生剪缩现象,应力应变曲线($\sigma_1 - \sigma_3$)— ϵ_n 通常呈硬化型。

对于超固结粘土、紧砂或粗颗粒料等,受剪时,在较高围压下,土体一般发生剪缩,应力应变曲线($\sigma_1 - \sigma_3$)— ϵ_n 通常呈硬化型;而在较低的围压下,土体受剪时通常表现为剪胀,应力应变曲线($\sigma_1 - \sigma_3$)— ϵ_n 通常会呈软化型。

对于超固结粘土、紧砂或粗颗粒料等,试验表明土的强度包线不再是直线而呈非线性,这就是说内摩擦角 φ 不是常数,如图 6-8 所示。如果仍用直线描述,在较高围压情况下将导致很大误差。为了反映 φ 不是常数的现象,一种做法是用折线分别近似描述低围压段和高围压段的内摩擦角 φ ,即分别采用 φ_1 、 φ_2 ;另一种做法是将 φ 表达为某种非线性函数,常采用的形式是 Duncan 提出的,即

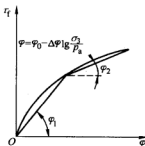


图 6-8 非线性强度包线

$$\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \lg \frac{\sigma_3}{p_a} \quad (6-7)$$

式中 p_a ——大气压力;

φ_0 —— $\sigma_3 = p_a$ 时的 φ 值;

$\Delta\varphi$ ——反映 φ 随 σ_3 而降低的参数;

φ_0 、 $\Delta\varphi$ ——由半对数纸上点绘的 $\varphi - \sigma_3$ 关系确定。

高围压与低围压情况相比,主要不同在于:超固结粘土、紧砂或粗颗粒料的颗粒咬合紧密,在高围压易使颗粒破碎。试验证明,在高围压下土样的细颗粒含量较试验前增多了。对于高土石坝、重型建筑物地基等应该采用高压三轴试验研究土的应力应变关系。

6.1.7 中主应力对变形的影响

中主应力既影响应力应变曲线的位置也影响应力应变曲线软化和硬化形态。

常规三轴试验中 $\sigma_2 = \sigma_3$, 而实际工程中 σ_2 与 σ_3 一般是不等的, σ_2 称为中主应力, 其变化范围是 $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, 毕肖普 (Bishop) 用参数 b 说明 σ_2 在 σ_3 和 σ_1 之间的位置, 即

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (6-8)$$

可见 $0 \leq b \leq 1$ 。将 σ_2 大于 σ_3 情况 (例如平面应变试验) 与同一 σ_3 且 $\sigma_2 = \sigma_3$ (轴对称常规三轴试验) 情况的两种试验结果相比较发现: 如图 6-9 可以看出中主应力对应力应变曲线的位置的影响, 前者的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线总在后者相应曲线的上方, 而前者的 $\epsilon_v - \epsilon_a$ 曲线总在后者相应曲线的下方。两种试验条件的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线和 $\epsilon_v - \epsilon_a$ 曲线不同, 说明中主应力 σ_2 对土的应力应变曲线有影响。也就意味着: 中主应力对土的抗剪强度也有必然影响, 一般情况下, 由于平面应变试验所得到 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线总在轴对称常规三轴试验相应曲线的上方, 故强度参数 φ 值前者要比后者高 $3^\circ \sim 5^\circ$ 。

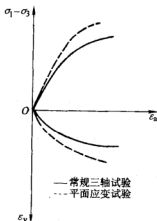


图 6-9 平面应变与三轴试验应力应变特征
(根据赵航 1988)

此外, 试验表明中主应力影响应力应变曲线软化和硬化形态。如图 6-10 所示, 在真三轴仪上对同种土样采取 σ_3 相同而 b 值不同 (即 σ_2 不同) 的试验结果, 发现当 $b = 0$ (相当于轴对称三轴试验) 条件下 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线呈硬化型; 而当 $b = 0.5$ 时 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线出现明显的峰值, 呈软化型, 当 $b = 1.0$ 时 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线的软化现象更加显著。从 $\epsilon_v - \epsilon_a$ 曲线可见, 随着 b 值的增大体缩量也有所增大, 这是因为 b 值的增大所体现的平均球应力 p 值的增大可能是主要因素。

另外, 由于 b 值不同所体现的应力应变曲线的差异, 进一步说明平均球应力 p 和偏应力 q 对土的软化或硬化、体缩或体胀的影响, 应注意的是这些影响还

受土的性质、应力历史等的综合影响。因此应该指出，实际应用中仅采用轴对称常规三轴试验资料会给计算结果带来误差。

6.1.8 土的各向异性性质

土的各向异性体现在两个方面，原生各向异性和次生各向异性。原生各向异性是土体在天然沉积或由于堆积或填筑过程中颗粒呈现某种定向排列；次生各向异性主要是指土体受荷后土体颗粒的位置和形态改变而形成，并且受应力路径和应力历史的影响。

对于原生各向异性土体，土的强度和应力应变关系将随颗粒定向排列方向和程度而变化。应力路径和应力历史对土的应力应变的影响主要是因为受荷后土体颗粒的位置和形态的改变，即应力诱致而产生次生各向异性。描述土各向异性的本构矩阵是非对称的，虽然产生一些数学上的复杂性但机理上更合理。由于实际土的多样性、复杂性，目前还难以准确描述次生各向异性。

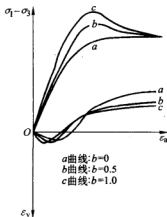


图 6-10 真三轴试验
(根据李广信 1985)

6.2 土的非线性模型

非线性模型实际上是指非线性弹性模型（特例是线弹性模型），是土体本构模型的一种类型。非线性模型大致有三类：Cauchy 弹性模型，超弹性模型和次弹性模型。Cauchy 弹性模型是弹性材料的应力（应变）惟一取决于当前的应变（应力）；超弹性模型是通过材料应变余能或余能函数建立的一类本构方程；次弹性模型是指弹性材料的应力状态不仅与应变状态有关，还与达到该应力状态的应力路径有关。

常用的非线性模型有非线性 $E-\mu$ 模型（及其后来发展的非线性 $E-B$ 模型）和非线性 $K-G$ 模型属于次弹性模型类型，它们能够近似地描述土的应力路径影响。非线性 $E-\mu$ 模型的提出主要基于常规三轴排水试验条件下土的应力应变曲线的非线性特征。模型建立的思路是参照线弹性模型中模量 E 、泊松比 μ 的定义，应用增量法概念逼近非线性应力应变曲线，对应的模型参数用切线变形模量 E_t 和切线泊松比 μ_t 。非线性 $K-G$ 模型是各向等压和等 p 三轴排水试验资料所整理的应力应变关系模型。这些模型一定程度上近似反映了应力路径因素，由于土的非线性性质，一般情况下也仅适宜采用增量法描述并用于实际计算。

6.2.1 非线性 $E-\mu$ 和 $E-B$ 模型

增量法概念下的切线变形模量 E_t 和切线泊松比 μ_t 分别定义为

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \epsilon_a} \quad (6-9)$$

$$\mu_t = -\frac{\partial \epsilon_r}{\partial \epsilon_a} \quad (6-10)$$

Duncan 等人考察分析了大量的常规三轴试验条件下土的应力应变 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 曲线, 如图 6-11a 所示, 发现加荷时他们大多可以近似用双曲线模拟。双曲线应力应变关系的形式为

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\epsilon_a}{a + b\epsilon_a} \quad (6-11)$$

$$\text{由切线模量定义则有 } E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \epsilon_a} = \frac{a}{(a + b\epsilon_a)^2} \quad (6-12)$$

分析上式, 当 $\epsilon_a \rightarrow 0$ 即加载之初时, $E_t = \frac{1}{a} = E_i$, E_i 是初始切线模量; 当 $\epsilon_a \rightarrow \infty$ 即土濒临破坏时, 应有 $E_t \rightarrow 0$ 。此时 b 是极限主应力差 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 渐进线的倒数, 即 $b = 1/(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 。根据三轴 CD 剪的试验数据, 计算并点绘 $\epsilon_a/(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 的关系, 如图 6-11b 所示可得到每条 $\sigma_3 = \text{常数}$ 时试验曲线 (一组试验一般应

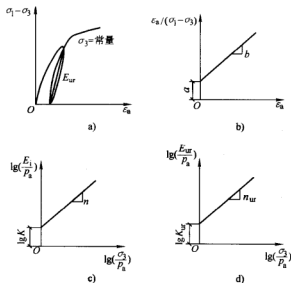


图 6-11 双曲线 $E-\mu$ 模型 (切线变形模量 E_t 参数推求)

a) $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 关系曲线 b) $\epsilon_a/(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 关系曲线

c) $E_t - \sigma_3$ 关系曲线 d) $E_{tu} - \sigma_3$ 关系曲线

进行4种不同的 σ_3 条件 CD 剪)的 a 、 b 值。因为双曲线总是在其渐进线的下面,故 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 就总是大于土的抗剪强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 。则有

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f(\sigma_1 - \sigma_3)_u \quad (6-13)$$

式中 R_f ——破坏比, R_f 小于1并假定与围压无关。

根据莫尔-库仑极限平衡理论有

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (6-14)$$

试验资料表明,初始切线变形模量 E_i 与围压 σ_3 有关,简布(Janbu)建议的经验关系为

$$E_i = K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (6-15)$$

在双对数纸上点绘 E_i 与围压 σ_3 关系,如图 6-11c,它们成直线, K 、 n 分别为该直线的截距和斜率。将式(6-11)改写为

$$\epsilon_a = \frac{a(\sigma_1 - \sigma_3)}{1 - b(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (6-16)$$

应用式(6-12),并将式(6-14)、(6-15)、(6-16)代入,则可以得到切线变形模量 E_t 为

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + \sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (6-17)$$

或简写成

$$E_t = (1 - R_f S_L)^2 E_i \quad (6-18)$$

式中 称为应力水平 $S_L = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$ 。

由式(6-18)可见,切线变形模量 E_t 随 S_L 的增大而迅速减小。当 ϵ_a 足够大即土样濒临剪切破坏时,有 $(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3)_f$, 则 $S_L \rightarrow 1$, $E_t \rightarrow 0$, 此时为了使计算进行下去,在实际计算时 E_i 取一个很小的值。

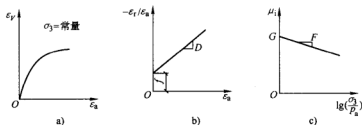
土体卸荷时,存在不可恢复的塑性变形并发生一定量的回弹变形(见图 6-11a)。为了模拟这一现象,当判断土体处于卸荷状态或卸荷后的再加荷状态时,应当采用卸荷变形模量 E_{ur} 计算,见图 6-11d,它与围压 σ_3 有如下关系

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_{ur}} \quad (6-19)$$

式中 参数 K_{ur} 、 n_{ur} ——分别是 E_{ur} 与围压 σ_3 截距和斜率,由三轴回弹试验确定。

如图 6-12a 所示,根据 Kulhawy 的建议,土的侧向应变 ϵ_r 与轴向应变 ϵ_a 之间的关系也可以用双曲线表示

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_r}{f + D\epsilon_r} \quad \text{或} \quad (6-20a)$$

图 6-12 双曲线 $E-\mu$ 模型(切线泊松比 μ_t 参数推求)

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_a} = f + D\epsilon_a \quad (6-20b)$$

$$\text{由切线泊松比定义} \quad \mu_t = -\frac{\partial \epsilon_t}{\partial \epsilon_a} = \frac{f}{(1 - D\epsilon_a)^2} \quad (6-21)$$

式(6-20)是以 $\frac{\epsilon_t}{\epsilon_a}$ 为纵坐标、 ϵ_a 为横坐标的直线方程。如图 6-12b 所示, D 为直线的斜率, D 与围压 σ_3 有关但差异较小, 一般取同组试样不同 σ_3 下所得 D 的平均值; f 是直线的截距, 表示零应变时的初始泊松比 μ_i , 试验表明 μ_i 与围压 σ_3 的关系可表达为如图 6-12c 的直线关系

$$\mu_i = G - F \lg\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) \quad (6-22)$$

将式(6-21)中 ϵ_a 用式(6-16), f 用式(6-22)代入, 则得切线泊松比表达式如下

$$\mu_t = \frac{G - F \lg\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)}{\left\{1 - \frac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{Kp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin\varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c\cos\varphi + 2\sigma_3\sin\varphi}\right]}\right\}^2} \quad \text{或} \quad (6-23a)$$

$$\mu_t = \frac{\mu_i}{\left\{1 - \frac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{E_i[1 - R_f S_L]}\right\}^2} \quad (6-23b)$$

式(6-23)求得的泊松比 μ_t 一般偏大, 旦尼尔(Daniel, 1974)建议用下式计算

$$\mu_t = \mu_i + (\mu_d - \mu_i) S_L \quad (6-24)$$

式中 μ_d ——破坏时的泊松比。

试验表明, 侧向应变 ϵ_t 与轴向应变 ϵ_a 之间的关系用双曲线描述误差较大, 计算的非线性泊松比 μ_t 一般偏大, 从而使实际工程计算的侧向变形量偏大。Duncan 等人(1978)提出用切线体积模量 B_t 代替 μ_t , 即所谓的 $E-B$ 模型。

体积模量定义为平均法向应力 p 与体积应变 ϵ_v 之比。在 σ_3 等于常数的常规

三轴 CD 剪试验中, 因 $\Delta\sigma_3 = 0$, 则平均法向应力增量 $\Delta p = \frac{1}{3}\sigma_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_3)$, 此时切线体积模量为

$$B_t = \frac{1}{3} \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \epsilon_v} \quad (6-25)$$

Duncan 等人假定, B_t 与应力水平无关, 也即与偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 无关, 这就相当于假定 $(\sigma_1 - \sigma_3)/3$ 与 ϵ_v 的关系是成比例的直线。对于某一 σ_3 , 点绘 $(\sigma_1 - \sigma_3)/3$ 与 ϵ_v 的关系, 但一般情况下不是直线, 如图 6-13 所示。Duncan 等人建议取应力水平 $S_L = 0.7$ 所对应的点与坐标原点连线的斜率作为 B_t , 即

$$B_t = \frac{1}{3} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{S_L=0.7}}{(\epsilon_v)_{S_L=0.7}} \quad (6-26)$$

对于不同的固结应力 σ_3 , 在双对数坐标纸上点绘 $\lg(B_t/p_a)$ 与 $\lg(\sigma_3/p_a)$ 关系, 取直线, 如图 6-14 所示, 其截距为 K_b , 斜率为 m 。则有切线体积模量 B_t 表达为

$$B_t = K_b \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (6-27)$$

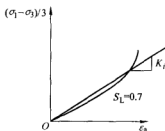


图 6-13 $(\sigma_1 - \sigma_3)/3 - \epsilon_v$ 曲线

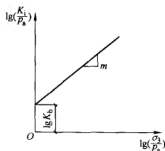


图 6-14 $K_t - \epsilon_v$ 关系曲线

非线性 $E-\mu$ 模型或 $E-B$ 模型需要由常规三轴 CD 剪试验确定参数, 分别有 10 个 (R_f 、 K 、 n 、 G 、 F 、 D 、 c 、 φ 以及 K_{ur} 、 n_{ur}) 或九个 (R_f 、 K 、 n 、 K_b 、 m 、 c 、 φ 以及 K_{ur} 、 n_{ur})。为了确定这些参数, 对于同种土应进行不同围压 σ_3 的试样至少三个, 一般不少于四个, 以备互相校核。目前, 非线性 $E-B$ 模型在土石坝工程中应用较为普遍, 在土石坝计算实践中发现计算的 E_t 、 B_t 一般偏低。通常认为, 因为模型中未反映中主应力 σ_2 对应力变形影响的缘故, 为此可近似将非线性 $E-B$ 模型作一些修正。一个简易的近似修正方法是将常规三轴应力状态量推广到广义应力状态量, 即将 E_t 、 B_t 中的 σ_3 、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 分别用广义正应力 p 和广义剪应力 q 代替, 如下式

$$E_t = K p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n (1 - R_f S_L)^2 \quad (6-28)$$

$$B_t = K_b p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^m \quad (6-29)$$

式中,
$$S_L = \frac{q}{q_t} = \frac{q}{M_p} \quad (6-30)$$

式中, M 为 q - p 应力空间中破坏线的斜率, 也可以直接应用 c 、 φ 换算, $M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$ 。也有其他一些近似处理方法, 如 E_t 、 B_t 或 μ_t 中的 σ_3 一律用 $\sigma_3 \sqrt{\sigma_3/\sigma_2}$ 代替, 以近似反映中主应力 σ_2 的影响, 同时也增大 E_t 、 B_t 或减小 μ_t 的计算值。应该指出, 这些近似处理方法仅仅是一种经验修正, 尚未得到试验验证。

6.2.2 非线性 K - G 模型

试验表明, 对于砂土或其他粗颗粒土应力应变关系受试验方法影响较大, 尤其是泊松比 μ 的误差较大。Naylor 等人提出用非线性体积模量 K_t 和非线性剪切模量 G_t 进行描述并用于增量计算, 称做 K - G 模型。试验发现有效广义正应力 (球应力) p 与体积应变 ϵ_v 以及广义剪应力 q 与广义剪应变 ϵ_s 分别可用如下微分式表示

$$d\epsilon_v = \frac{dp}{K_t} \quad (6-31)$$

$$d\epsilon_s = \frac{1}{3G_t} dq \quad (6-32)$$

Naylor 假定非线性切线体积模量 K_t 和非线性切线剪切模量 G_t 可分别表达为

$$K_t = K_i + \alpha_k p \quad (6-33)$$

$$G_t = G_i + \alpha_G p + \beta_G q \quad (6-34)$$

α_k 、 K_i 、 G_i 、 α_G 、 β_G 是非线性 K - G 模型的五个参数。其中 α_G 为正值, β_G 为负值, 这是因为 p 的增加使切线剪切模量增大, 而 q 的增加使切线剪切模量反而减小, 直至试样破坏时为零。若令 $G_t = 0$, 即土体破坏时, 根据破坏线方程 $q =$

$n + mp$ 有 $q = -\frac{G_i}{\beta_G} - \frac{\alpha_G}{\beta_G} p$, 二式比较得

$$G_i = -n\beta_G, \quad \alpha_G = -m\beta_G \quad (6-35)$$

将式(6-35)代入式(6-34)得到

$$\beta_G = \frac{G_i}{q - n - mp} \quad (6-36)$$

1. 非线性切线体积模量 K_t

积分式(6-31), 得到体积应变与平均有效应力 p 的关系

$$\epsilon_v = \frac{1}{\alpha_k} \ln \left(\frac{K_i + \alpha_k p}{K_i} \right) \quad (6-37)$$

通过逐级加荷的各向等压试验,在直角坐标系中点绘 ϵ_v-p 曲线,应用图解法分别取 4~5 个 p 在曲线上所对应点的斜率,即得 $K_i = dp/d\epsilon_v$ 值,再点绘 K_i-p 的关系近似取直线,如图 6-15。该直线的斜率和截距即分别为 α_k 、 K_i ,其中 K_i 称为初始切线体积模量。也可应用式(6-37)拟合 ϵ_v-p 曲线,通过数理统计分析求得参数 α_k 、 K_i 。

2. 非线性切线剪切模量 G_t

应用 $p = \text{常数}$ (等 p) 三轴排水剪试验,得到不同等 p 条件下的 $q-\epsilon_s$ 曲线和破坏线方程 $q = n + mp$ 。根据 $d\epsilon_s = \frac{1}{3G_t} dq$ 的关系,积分之可得到关系式

$$\epsilon_s = \frac{1}{3\beta_G} \ln \left(\frac{n + mp - q}{n + mp} \right) \quad (6-38)$$

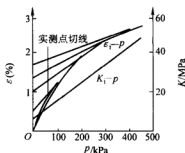


图 6-15 ϵ_v-p 和 K_i-p 关系曲线

G_t 、 α_G 、 β_G 若应用数解法则比较方便,根据实测的 $q-\epsilon_s$ 以及 p 、 n 、 m 值代入式(6-38),求应力水平 $S_L = 0.65 \sim 0.95$ 的各 β_G 的平均值作为所确定的参数 β_G ,再由式(6-35)进而求得 G_t 和 α_G 值。

6.2.3 矩阵表示的本构关系和非线性模型参数的互换

为了数值计算的方便,非线性增量描述的土本构关系可用广义 Hooke 定律矩阵形式表示为

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\epsilon\} \quad (6-39a)$$

$$\{d\epsilon\} = [C^e] \{d\sigma\} \quad (6-39b)$$

式中 $\{d\sigma\}$ 和 $\{d\epsilon\}$ 分别为应力增量列向量和应变增量列向量, $[D^e]$ 称为非线性弹性刚度矩阵, $[C^e] = [D^e]^{-1}$ 称为非线性弹性柔度矩阵。在三维应力条件下,对于 $E-\mu$ 模型的 $[D^e]$ 表达为

$$[D^e] = \frac{E_t}{(1 + \mu_t)(1 - 2\mu_t)} \begin{bmatrix} 1 - \mu_t & \mu_t & \mu_t & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \mu_t & \mu_t & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \mu_t & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\mu_t}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1 - 2\mu_t}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1 - 2\mu_t}{2} \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

SYM

对于其他模型不再重写 $[D^*]$ 形式, 为方便应用, $E-\mu$ 模型、 $E-B$ 模型和非线性 $K-G$ 模型之间的参数通过推演可以得到如表 6-1 所示的互换关系。

表 6-1 $E-\mu$ 、 $E-B$ 、 $K-G$ 模型的参数互换

参 数 模 型	弹性模量	剪切弹性模量	体积变形模量	泊 松 比	压缩模量
(E, μ)	E	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\frac{E}{3(1-2\mu)}$	μ	$\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$
(E, B)	E	$\frac{3B}{9B-E}$	B	$\frac{3B-E}{6B}$	$\frac{3B(3B+E)}{9B-E}$
(K, G)	$\frac{9KG}{3K+G}$	G	K	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	$K + \frac{4}{3}G$

注: 1. 参数互换对于线性和非线性模型 (省略下标 i) 均相同。

2. 广义 Hooke 定律限定泊松比范围是 $0 \leq \mu_i < 0.5$, 因此对于 $E-B$ 模型就相当于 B_i 的取值必须限定范围: $E_i/3 \leq B_i \leq 17E_i$, 否则计算中须进行人工干预。

6.2.4 非线性模型讨论

非线性 $E-\mu$ 、 $E-B$ 模型概念清楚也比较简单, 参数的几何意义和物理意义都比较明确。通过模型中的 σ_3 、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 近似反映应力路径对应力变形的影响, 但模型未能反映中主应力 σ_2 对应力变形的影响。将 σ_3 、 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 分别用广义正应力 p 和广义剪应力 q 代替或将 E_i 、 B_i (或 μ_i) 中的 σ_3 一律用 $\sigma_3 \sqrt{\sigma_3/\sigma_2}$ 代替, 仅仅是一种近似处理, 用以近似反映中主应力 σ_2 的影响, 并未得到试验验证。模型没有区分弹性变形和塑性变形, 因此对于连续加载情况能够较好模拟, 尽管通过回弹模量 E_w 在一定程度上模拟了卸载情况, 但不能完全反映应力历史的影响。由于非线性模型应用的广义 Hooke 定律, 因而模型不能描述土的剪胀性, 不能反映应变软化, 因而应用于紧砂、超固结土等应变软化类岩土材料则易产生较大的误差, 为解决这个问题沈珠江曾提出应变软化型驼峰曲线模型, 将剪胀引起的体应变按初应变的处理方法不失为一种思路。

非线性 $K-G$ 模型应用三轴仪测定参数, 但 K 、 G 独立确定易于与应力状态关联, 从而得到一般解。模型不能反映中主应力 σ_2 对应力变形的影响, 也不能完全反映应力历史的影响, 应力路径对应力变形的影响也只能近似反映。

非线性模型应用了广义 Hooke 定律, 也不能描述土的剪胀和软化特性。模型也未反映平均正应力 p 与广义剪应力 q (压缩与剪切) 的交叉影响, 应用这些模型还意味着隐含土体各向同性的假定。

6.3 土的弹塑性模型理论

土应力应变关系具有明显的非线性和弹塑性特性。由于土的多样性和性质的

复杂性,土的非线性模型尚不能反映土复杂的弹塑性特性,需要建立弹塑性本构模型。通常采用的土体弹塑性模型理论体系以经典屈服面理论为基础,由四部分组成:即屈服和破坏准则,流动规则,硬化规律,最终目的是建立适用的本构方程。依据试验所揭示的土的应力应变特性进行归纳、总结和抽象,应用塑性理论和基本力学原理是建立土体本构模型的基点。应该指出土不同于像金属、混凝土等这样的坚硬材料,其塑性理论的思路可以借鉴但不能完全套用。

6.3.1 屈服与破坏准则

材料受力后将产生变形甚至破坏,材料破坏前后的变形状态是不同的。

当应力达到某一状态时材料发生了不可恢复的塑性变形,称为屈服。材料在某一应力点第一次出现塑性变形称为初始屈服,该应力点叫做初始屈服应力;初始屈服后由于应力状态的变化,材料又发生了新的塑性变形(塑性变形增量),称为相继屈服,相继屈服在加载条件下发生,因此又称加载屈服,相应的屈服应力也称为加载应力。屈服是指材料发生塑性变形的同时并不排除也发生弹性变形,例如对于正常固结土一个微小的应力增量作用下就发生了初始屈服,弹性变形可能伴随塑性变形同时发生,对于超固结土初始屈服之前则可能仅发生弹性变形。

屈服准则是判断材料受力到什么应力状态才出现塑性变形,或者说何种应力状态是出现塑性变形的条件,因此屈服准则又称屈服条件。当材料因变形过大或者因丧失承受外力的能力时就称为破坏。对于理想塑性材料和应变硬化材料,当出现无限制的塑性流动变形时就称为破坏;对于脆性材料和应变软化材料当应力点达到破坏应力或强度时称为破坏。破坏准则是指材料受力变形后是否达到破坏的判别标准。对于理想塑性材料由于屈服时变形无限制发展,这种情况下屈服准则与破坏准则是一致的。屈服准则和破坏准则在同种模型中的表达应当匹配。

屈服准则和破坏准则多以应力状态表示,当然也可以通过本构关系转换用应变状态表示。屈服准则和破坏准则的一般函数形式是

$$f_y(\sigma_{ij}, H_a) = 0 \quad a = 1, 2, 3 \cdots \quad (6-41)$$

$$f_t(\sigma_{ij}, k_t) = 0 \quad (6-42)$$

式中 H_a ——硬化参数或硬化参量;

k_t ——破坏参数。

两式也分别称为屈服函数与破坏函数。对于各向同性材料,屈服和破坏与坐标系选择无关也与坐标旋转无关,屈服函数与破坏函数在应力空间中的几何形态是某种曲面,对于某种确定的准则和材料,曲面形状就一定。屈服函数所描绘的面称为屈服面,当应力增大材料发生新的塑性变形时屈服面将向外扩大,称为相继屈服面又称加载面。破坏函数所描绘的面称为破坏面,是应力状态所能达到的极限面,也是屈服面的极限面。下面通过介绍几个常见的屈服准则和破坏准则来

理解并学会应用。

1. Tresca 准则

1864年, Tresca 根据金属材料的试验资料提出了最大剪应力屈服准则, 即当最大剪应力达到某一极限值时, 材料产生屈服, 也称为最大剪应力条件, 在材料力学中称为第三强度理论。Tresca 准则的屈服函数表达为

$$f_y = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k_T^2] \times [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k_T^2] \times [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k_T^2] = 0 \quad (6-43)$$

$$\text{或} \quad f_y = q \cos \theta_\sigma - \sqrt{3} k_T = 0 \quad (6-44)$$

当计算中限定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时, 式(6-44)可简化为

$$f_y = \sigma_1 - \sigma_3 = \pm 2k_T \quad (6-45)$$

k_T 为试验测定的材料常数。由式(6-45)当单向拉、压时 $k_T = \frac{1}{2} \sigma_s$; 当进行纯剪时 $k_T = \tau_s$ 。 σ_s 、 τ_s 分别是拉、压和纯剪切屈服应力。

在主应力空间中 Tresca 准则的屈服面是一个以空间对角线(静水压力线)为中心轴的正六角柱面, 在扁平面和 π 平面上的屈服曲线是相同的正六边形, 如图 6-16a、b 所示; 因为屈服准则与球应力(静水压力)或与第一不变量 I_1 无关, 因此屈服曲线在 p - q 平面上为两条平行于 p 轴的直线。Tresca 准则适用于金属材料或 $\varphi = 0$ 的纯粘性土。

为了考虑静水压力(球应力或第一不变量 I_1)对屈服的影响, 只要在 Tresca 准则的基础上加上静水压力, 就得到广义 Tresca 准则

$$f_y = (\sigma_1 - \sigma_2 - k_T + aI_1) \times (\sigma_2 - \sigma_3 - k_T + aI_1) \times (\sigma_3 - \sigma_1 - k_T + aI_1) = 0 \quad (6-46)$$

$$\text{或} \quad f_y = q \cos \theta_\sigma - \sqrt{3} k_T - \sqrt{3} a I_1 = 0 \quad (6-47)$$

式中, a 为材料试验参数。

由式(6-46)可见, 在主应力空间中广义 Tresca 准则的屈服面是一个以空间对角线(静水压力线)为中心轴的等边正六角锥面, 在扁平面和 π 平面上的屈服曲线都是正六边形, 如图 6-16a、b 所示。由于屈服面有棱角, 而在棱角处屈服函数不可微或奇异, 这时就称为非正则屈服面, 增加了塑性增量计算的不便。当屈服函数处处连续可微时, 就称为正则屈服面。

2. Mises 准则

Mises 准则是 Mises 于 1913 年在分析金属材料的试验资料时提出的, 在主应力空间中屈服函数表达为

$$f_y = q - \sqrt{3} k_m = 0 \quad (6-48)$$

k_m 是材料屈服常数, 由试验确定, 拉或压时 $k_m = \sigma_s / \sqrt{3}$; 纯剪时 $k_m = \tau_s$; 由于 q 可反映材料的形变能, 因此当材料的形变能达到一定程度时发生屈服, 故

Mises 准则也称为能量屈服准则, 当金属材料呈现理想弹塑性性质时, 该屈服准则就视为破坏准则, 就是材料力学所述的第四强度理论—能量强度理论。从屈服常数还可见, Mises 准则与静水压力或第一不变量 I_1 、第三不变量 J_3 或应力 Lode 角 θ_σ 无关。因此, 在主应力空间中 Mises 准则的屈服面是一个以空间对角线 (静水压力线) 为中心轴的圆柱面, 在扁平面和 π 平面上的屈服曲线是相同的圆, 如图 6-17a、b 所示。比较 Mises 准则与 Tresca 准则, 前者的屈服面外接于后者的屈服面。

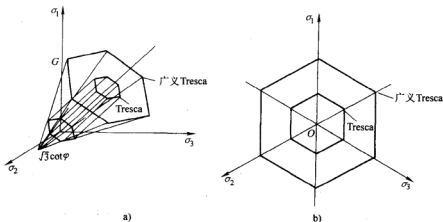


图 6-16 Tresca 准则及广义 Tresca 准则

a) 主应力空间屈服曲面 b) π 平面屈服轨迹 (屈服曲线)

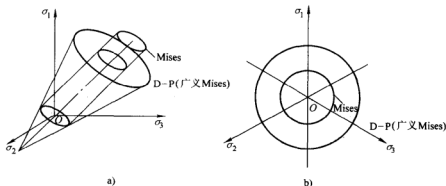


图 6-17 Mises 准则及 D—P 准则

a) 主应力空间屈服曲面 b) π 平面屈服轨迹 (屈服曲线)

3. 莫尔—库仑准则

库伦 (Coulomb) 早在 1773 年就提出了土的强度理论即公式 $\tau_f = c + \sigma \tan \varphi$, 如果土中某点的一个平面上的剪应力等于抗剪强度即 $\tau = \tau_f$ 时认为该点破坏 (破坏

准则)。如假定材料为理想塑性即认为该点屈服,这就是库仑屈服准则。莫尔于1900年求得土样破坏时一组极限状态应力圆相切的强度包络曲线,发现当静水压力不大时包络曲线可用库仑公式的直线表达。根据极限状态应力圆与强度包线的几何关系,如图6-18所示,该直线方程就称为莫尔—库仑屈服准则(也即破坏准则,简称C—M准则),因此C—M屈服准则可表达为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (6-49)$$

或
$$f_y = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (6-50)$$

式(6-50)仅是平面应力状态的莫尔—库仑屈服函数,未反映中主应力 σ_2 的影响。在三维主应力空间中在 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 条件下,其破坏面可采用与式6-50相似的屈服函数表达为

$$f_y = \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - [(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi + 2c \cos \varphi]^2\} \{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - [(\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi]^2\} \{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - [(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi]^2\} = 0 \quad (6-51)$$

在主应力空间中C—M准则的屈服面是一个以空间对角线(静水压力线)为对称轴的六角锥面,六个锥角三三相等。在扁平面或 π 平面上的屈服曲线是六个锥角三三相等的六边形,如图6-18a、b所示。C—M准则在 p — q 平面上的屈服曲线如图6-18c所示,当然在其他平面上也有相应的屈服函数和屈服曲线形式。

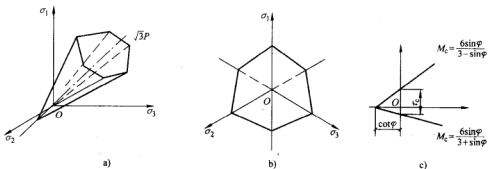


图6-18 M—C准则

a) 主应力空间屈服曲面 b) π 平面屈服轨迹 c) p — q 平面屈服轨迹

C—M准则的主要特点是:岩土类材料拉压强度不同的特性(称为S—D效应)及静水压力的影响;简单适用,参数 c 、 φ 易于通过常规试验测定。因此该准则广泛应用于岩土力学和塑性理论。但C—M准则不能反映 σ_2 对屈服与破坏的影响及单纯静水压力对屈服的影响;此外,C—M准则的屈服面有棱角,在棱角处屈服函数不可微或奇异,屈服面非正则将增加塑性增量计算的不便。

4. Drucker—Prager 准则

为了考虑静水压力(正应力或第一不变量 I_1)对屈服和破坏的影响, Drucker 和 Prager 1952 年提出了广义 Mises 准则, 也称 Drucker—Prager 准则或简称 D—P 准则

$$f_y = q - 3\sqrt{3}ap - \sqrt{3}k_m = 0 \quad (6-52)$$

式中, a 、 k_m 为材料常数。

不同应力状态试验条件下 a 、 k_m 的表达式不同, 一般可由真三轴试验直接测定各种不同应力状态条件下的材料参数 a 、 k_m 。在三维应力状态下, D—P 准则的材料常数 a 、 k_m 与 C—M 准则材料参数 c 、 φ 总存在一定的换算关系, 但某些简单应力状态条件可以利用他们的屈服函数推导出。

例如: 常规三轴压缩($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ 即 $\theta_\sigma = -\frac{\pi}{6}$ 或 $\mu_\sigma = -1$) 条件

$$a = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin\varphi)} \quad k = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin\varphi)} \quad (6-53)$$

常规三轴拉伸($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ 即 $\theta_\sigma = \frac{\pi}{6}$ 或 $\mu_\sigma = 1$) 条件

$$a = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} \quad k = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} \quad (6-54)$$

平面应变条件($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 即 $\theta_\sigma = -\frac{\pi}{6} \leq \theta_\sigma \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$) 条件

$$a = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2\varphi}} \quad k = \frac{\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{3 + \sin^2\varphi}} \quad (6-55)$$

在主应力空间中 Drucker—Prager 准则的屈服面是一个以空间对角线(静水压力线)为中心轴的圆锥面, 在扁平面的屈服曲线是圆, 当 $a = 0$ 时 Mises 准则作为 D—P 准则的一个特例而已, 如图 6-17a、b 所示。D—P 准则同时考虑了平均应力(或体应变能)及偏应力(或形状变化能)的能量屈服准则。

D—P 准则的主要特点是: 考虑了静水压力对屈服和破坏的影响, 比较适合岩土类材料的本构特性; 比较简单, 材料参数少且易于试验测定或由 C—M 准则的材料参数换算; 屈服面光滑无棱角, 方便塑性增量计算。但该准则没有考虑屈服和破坏的非线性特性及岩土类材料拉压强度不同的特性, 尚需要改进。

6.3.2 加载条件与加载准则

加载条件与加载准则是用于描述塑性变形的专门术语。加载条件是使材料产生新的塑性变形的条件或者说使应力保持在屈服面或相继屈服面上的条件。因此加载条件是一个函数, 在应力空间中是一个面, 故亦称加载面, 一般形式表达为

$$\phi(\sigma_{ij}, H_a) = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3 \dots \quad (6-56)$$

式中 H_a 与式 (6-41) 含义相同, 为硬化参数 (或硬化参量), 对于理想塑性材料, 取 $H_a = 0$ 。 H_a 与塑性变形或加载历史有关, 可以是塑性变形的各个分量, 塑性体应变、塑性剪应变, 塑性功或其他某些内变量的函数。保证实现加载条件的准则称为加载准则。不满足加载条件时可能是中性变载或卸载。对于某些简单的应力状态, 加、卸载很容易判断; 然而对于复杂的应力状态, 加、卸载时各个应力分量可能有增有减, 因此必须建立相应的加载准则, 以下只讨论正则加载面情况。

加载条件的全微分为

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial H_a} dH_a = 0 \quad (6-57)$$

该全微分式说明应力增量 $d\sigma_{ij}$ 和硬化参量 dH_a 的变化将引起加载面的变化; 同时因为 dH_a 又是因 $d\sigma_{ij}$ (或 $d\varepsilon_{ij}^p$) 而产生的。因此可以由应力变化是否离开加载面来描述加、卸载准则, 其表达式如下

$$\phi = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{当 } d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \text{ 时 加载} \\ \text{当 } d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \text{ 时 中性变载} \\ \text{当 } d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \text{ 时 卸载} \end{array} \right\} \quad (6-58)$$

所谓中性变载, 实际上就是应力点沿屈服面移动 ($\phi = 0$), H_a 不变化即 $dH_a = 0$, 只产生弹性变形 ($d\phi = 0$) 不发生塑性变形。对于理想塑性材料, 由于不存在材料硬化, 屈服面不能扩大, 则不可能出现 $d\phi > 0$ 的情况, $\phi = 0$ 和 $d\phi = 0$ 就是加载; 也不出现中性变载情况。上述加载准则不适用于应变软化材料, 材料应变软化时表现为加载面收缩 ($d\phi < 0$), 这就与卸载准则无法区别。对于应变软化材料, 最好是采用应变空间加载面 ϕ , 加卸载准则用应变形式表示。

6.3.3 Drucker 公设

1951 年, Drucker 提出了关于稳定材料在弹塑性加、卸载的应力循环过程中塑性功不可逆的 Drucker 公设。

1. 稳定材料与不稳定材料

如果将弹塑性材料进行简单压缩试验, 可以得到两种类型试验曲线。在图 6-19a 中, 当 $\Delta\sigma \geq 0$, 同时 $\Delta\varepsilon \geq 0$, 这时附加应力 $\Delta\sigma$ 对附加应变 $\Delta\varepsilon$ 作的功为非负, 即有 $\Delta\varepsilon\Delta\sigma \geq 0$ 。Drucker 将具有这类试验曲线的材料称为稳定材料。显然, 应变硬化材料和理想塑性材料均属于稳定性材料之列。如图 6-19b 所示, 当应力点达到曲线峰点 P 后, 附加应力 $\Delta\sigma < 0$, 而附加应变 $\Delta\varepsilon > 0$, 故附加应力对附加

应变做负功，即 $\Delta\sigma\Delta\varepsilon < 0$ ，具有这种试验曲线类型的材料称为不稳定材料。显然，具有应变软化性质的材料在应变软化阶段（峰点 P 以后）就属于不稳定性材料。

2. Drucker 公设

将稳定材料概念推广到复杂应力状态和一个完整的弹塑性加、卸载循环过程，可得到 Drucker 公设。Drucker 公设叙述为：对于稳定材料，在常温和缓慢的加卸载条件下完成一个完整的弹塑性加、卸载循环过程，有：

1) 在加载过程中，附加应力做功非负。

2) 如果加载产生塑性变形，则在整个的加载过程中，附加应力做功非负；如果加载不产生塑性变形（即纯弹性应力循环），附加应力做功为零。

Drucker 公设的第一条实际上就是关于稳定性材料的定义，如图 6-20a，说明它是针对稳定性材料而言的。关于第二条说明如下：图 6-20a、b 为稳定材料的加卸载的循环过程；图 6-20a 为主应力空间的加载面与应力循环过程。设某材料单元在加载前处于 A 点，相应的应力状态 σ_{ij}^0 ，当加载至 B 点时，相应的应力为 σ_{ij} ，在由 A 至 B 的弹性加载过程中，只产生附加的弹性变形。然后在加载应力 σ_{ij} 的基础上，在增加一个微小的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 至 C 点。由 B 至 C 为塑性加载，加载面向外扩大，相应的将产生弹性应变增量与塑性应变增量，即又有向外扩大的相继屈服面。然后再由 C 点卸载至原来的应力状态 A 点，这样就完成了一个完整的应力循环过程，在这一应力循环中产生的总应变增量为弹性与塑性两部分之

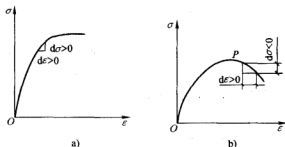


图 6-19 两种类型试验曲线

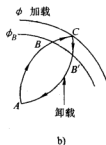
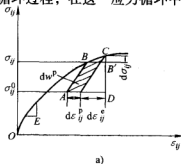


图 6-20 Drucker 公设

a) 应力循环 b) 应力空间加载过程

和, 即 $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$ 。由于在应力循环过程中, 弹性功是可逆的。故弹性功的变化为零。因此, Drucker 公设的第二条就是塑性功的描述, 其数学形式可表示为

$$d\omega_p = \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 \right) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (6-59)$$

在几何上上式代表图 6-20a 中 $ABCD$ 的面积。它说明在一个完整的应力循环过程中, 塑性功不可逆。即外力所作的塑性功为材料产生的塑性变形功所吸收, 不能再释放出来, 由此可以推导出以下两个重要的不等式, 即

1) 如果 σ_{ij}^0 在原来的加载面以内, 即 $\sigma_{ij}^0 < \sigma_{ij}$; 且 $d\sigma_{ij}$ 为一个任选的无限小应力增量, 与 σ_{ij} 相比可以忽略不计, 故由式(6-59)有

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (6-60)$$

式(6-60)也是 Drucker 公设第二条的另一种表达式。其中 σ_{ij} 为产生 $d\epsilon_{ij}^p$ 时的加载应力状态。

2) 当 σ_{ij}^0 位于原来的加载面 B 点时, 即 $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}$, 由式(6-59)有

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (6-61)$$

对应硬化材料, 上式中大于号表示塑性加载, 等于号表示中性变载; 对于理想塑性材料, 等号表示加载, 大于号无意义。如果考虑加载过程产生的弹性变形, 则弹塑性功增量为

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \geq 0 \quad (6-62)$$

式(6-60)、式(6-61)就是 Drucker 公设第一条关于材料稳定性的数学定义。

对于不稳定材料, 例如对于应变软化材料来说, 只有在完成加卸载循环的条件下, Drucker 公设的第二条才能成立, 即应变软化材料 Drucker 公设可有条件成立。可应用图 6-21 根据式(6-59)、式(6-60)、式(6-61)进行说明, 在应力应变曲线的 P 点以后, 当 σ_{ij}^0 点 A 的远离屈服极限时, 这时式(6-59)仍然成立; 但式(6-60)、式(6-61)不成立, 这说明在一点的应力循环中, Drucker 公设的第二条仍然成立; 当 σ_{ij}^0 点 A' 取得非常接近屈服曲线时, 这时, 由于应变软化的作用, 完不成应力的循环过程 (只有加载, 没有卸载); 从而式(6-59)、式(6-60)、式(6-61)都不能成立, 说明这种情况下 Drucker 公设不适应于不稳定材料。

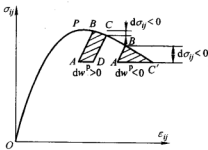


图 6-21 应变软化材料

3. Drucker 公设的推论

由 Drucker 公设可以推出以下几条重要的推论 (这里不加证明, 可参阅有关文献):

1) 屈服面或加载面处处外凸。只要材料满足 Drucker 公设, 根据式 (6-59)、式 (6-60) 屈服面或加载面就必须处处外凸。

2) 塑性应变增量矢量的正交性。塑性应变增量矢量的正交性指的是塑性应变增量矢量的方向与加载面正交并指向其外法线方向。塑性应变增量表达为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6-63)$$

式中 $d\lambda$ ——非负的标量塑性因子, 将由正交流动法则确定, 它反映 $d\epsilon_{ij}^p$ 的绝对值大小。

3) $d\epsilon_{ij}^p$ 与 $d\sigma_{ij}$ 的线性相关关系

式 (6-63) 说明 $d\epsilon_{ij}^p$ 各分量之间的比值或大小与 $d\lambda$ 有关, 而 $d\epsilon_{ij}^p$ 或 $d\lambda$ 的大小又是由应力增量而产生的。故可以假设

$$d\lambda = h \partial \phi = h \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (6-64)$$

将式 (6-64) 代入式 (6-63) 有

$$d\epsilon_{ij}^p = h \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \right) \quad (6-65)$$

式中 h ——硬化模量或硬化函数。

但是 h 与 $d\sigma_{ij}$ 无关, 取决于当前的 σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 与加载历史。因此 (6-63) 说明 $d\epsilon_{ij}^p$ 或 $d\lambda$ 与 $d\sigma_{ij}$ 线性相关, 这样的硬化就称为线性硬化规律。

6.3.4 流动规则

对于理想塑性或弹塑性材料, 塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 的方向与应力增量 $d\sigma_{ij}$ 的方向一般不一致, 而与屈服函数或塑性势函数的梯度有关。塑性位势理论是 Mises 由弹性势理论推导而来, 称塑性位势理论。Mises 假定材料处于塑性流动状态时存在某种塑性势函数, 这种塑性势可以是应力的标量函数 $Q(\sigma_{ij})$ 或应力不变量的函数, 例如 $Q(I_1, \sqrt{J_2}, J_3)$ 、 $Q(p, q, \theta_\sigma)$ 形式。塑性势函数在应力空间中是一个塑性势面。流动规则是关于塑性应变增量方向的假定, 其数学表达式为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6-66)$$

式 (6-66) 说明塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 的方向与塑性势函数的梯度方向或塑性势面的外法线方向一致。所以塑性位势理论也称塑性流动规律或正交流动规则。塑性位势理论是用于确定塑性应变增量方向的一种假设, 因此为了满足正交流动规则, 可以假设不同形式的塑性势函数。如果假定塑性势函数等于加载函数或屈服函数, 即 $Q = \phi$ 或 $Q = f$, 这时必须满足 Drucker 公设的推论, 这样塑性势函数与加载函数或屈服函数相关联, 称为相关联的流动规则, 塑性势函数惟一。如果使

$Q \neq \phi$ 或 $Q \neq f_y$, 则 $d\epsilon_y^p$ 的方向与加载面或屈服面不正交, 但仍与塑性势面正交, 例如 Lade-Duncan 模型。这时称为不相关联的流动规则, 这样塑性势函数的选取就非惟一。

6.3.5 硬化规律

土不同于金属材料, 通常应力应变呈现硬化特征。在加载过程中, 加载路径的变化会影响加载面的大小、形状以及加载面的中心位置甚至主方向都可能发生变化, 这种变化规律称为硬化规律或硬化模型。目前还缺少足以描述这种变化规律的试验资料, 因此必须做一些假设, 例如各向同性硬化模型, 运动硬化模型, 混合硬化模型等, 对于岩土类材料以各向同性硬化模型最为常用。选择用于描述硬化规律的参数称为硬化参量。岩土类材料常用的硬化参量有: 塑性功, 塑性体应变, 塑性剪应变等。

1. 硬化模量

由式 (6-59) 可知标量塑性因子 $d\lambda$ 与应力增量 $d\sigma_{ij}$ 和硬化函数 h 有关, 将由正交流动法则确定硬化函数 h 的倒数称为硬化模量 A , 即 $A = 1/h$ 。采用各向同性硬化假设, 当产生应力增量 $d\sigma_{ij}$ 后, 加载面扩大相应的加载函数为

$$\phi(\sigma_{ij}, H_a) + d\phi = 0 \quad (6-67)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial H_a} dH_a = \frac{d\lambda}{h} + \frac{\partial \phi}{\partial H_a} dH_a = 0 \quad (6-68)$$

$$dH_a = - \frac{d\lambda}{h} \frac{\partial \phi}{\partial H_a} \quad (6-69)$$

则硬化模量

$$A = - \frac{\partial \phi}{\partial H_a} dH_a / d\lambda \quad (6-70)$$

该式表达了加工硬化的相容条件, dH_a 反映加载面大小的变化。当为理想塑性材料, 则 H_a 为常数, 即 $dH_a = 0$ 从而 $A = 0$ 。 H_a 一般假设为某些硬化参量的函数, 假设不同的硬化函数就形成不同的硬化规律。由式 (6-68) 可得到式 (6-71)

$$A d\lambda = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T \{ d\sigma \} \quad (6-71)$$

2. 塑性功硬化规律

假定塑性功是引起土体硬化的根本原因, 即以塑性功 W^p 作为硬化参数 H (只取一个硬化参数, H_a 中相当于 $a = 1$)。

$$H = W^p(\epsilon_{ij}^p) = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (6-72)$$

由此可见, H 与应力历史有关, 积分应当沿应力路径进行。微分式 (6-72) 则得

$$dH = dW^p = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (6-73)$$

将流动规则代入, 则硬化模量为

$$A = -\frac{\partial \phi}{\partial H} dH_a \times \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} / d\epsilon_{ij}^p = -\frac{\partial \phi}{\partial W^p} \times \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (6-74)$$

3. ϵ_{ij}^p 硬化规律

假定塑性应变 ϵ_{ij}^p 是引起土体硬化的根本原因, 即以 ϵ_{ij}^p 作为硬化参数 H , 即 $H = \epsilon_{ij}^p$ 。

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p \quad (6-75)$$

$$A = -\frac{\partial \phi}{\partial H_a} dH_a / d\lambda = -\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \times \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6-76)$$

4. ϵ_v^p 、 ϵ_s^p 硬化规律

ϵ_v^p 、 ϵ_s^p 硬化规律认为材料的硬化由体积应变 ϵ_v^p 和广义剪应变 ϵ_s^p 共同引起的, 即硬化参数为

$$H = H(\epsilon_v^p, \epsilon_s^p) \quad (6-77)$$

假定 ϕ 、 Q 、 H 与应力 Lode 参数 θ_σ 无关, 则

$$A = -\frac{\partial \phi}{\partial H} \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon_v^p} \times \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial \epsilon_s^p} \times \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \quad (6-78)$$

若 H 取 ϵ_v^p 、 ϵ_s^p 的其中之一作为硬化参数, 式(6-78)硬化模量 A 可得相应的形式。

6.3.6 本构矩阵

本构方程是依据破坏准则、屈服准则、流动规则和硬化规律所建立的应力应变关系。加载时土体所发生的总应变增量可以分解为弹性应变增量与塑性应变增量之和, 用矩阵表示即为

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^p\} \quad (6-79)$$

其中, 弹性应变增量 $\{d\epsilon^e\}$ 可由广义 Hooke 定律确定

$$\{d\epsilon^e\} = [D^e]^{-1} \{d\sigma\} \quad (6-80)$$

塑性应变增量由塑性位势理论确定

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (6-81)$$

$$\{d\epsilon\} = [D^e]^{-1} \{d\sigma\} + d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (6-82)$$

则

$$[D^e]^{-1} \{d\sigma\} = \{d\epsilon\} - \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} d\lambda \quad (6-83)$$

式(6-83)两边乘 $\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e]$, 整理后得

$$d\lambda = \frac{\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e] \{d\epsilon\}}{A + \left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}} \quad (6-84)$$

将 $d\lambda$ 代回整理得

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\epsilon\} = \left[[D^e] - \frac{[D^e] \left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\} \left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e]}{A + \left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}} \right] \{d\epsilon\} \quad (6-85)$$

式中, $[D^e]$ 称为弹塑性矩阵: $[D^e] = [D^e] - [D^p]$; 其中 $[D^p]$ 称为塑性矩阵, 表达为

$$[D^p] = \frac{[D^e] \left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\} \left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e]}{A + \left\{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}} \quad (6-86)$$

6.4 土的弹塑性模型举例

6.4.1 状态边界面

Roscoe 等人根据对正常固结粘土 (剑桥粘土) 试样各向等压固结试验及各向等压固结后的排水 (CD) 和不排水 (CU) 常规三轴压缩试验结果提出土的状态边界面概念并建立了基于弹塑性理论的著名剑桥 (Cam bridge) 模型, 而后又进一步提出了修正的剑桥模型。

Roscoe 等人根据试验结果得到如图 6-22 所示的 p - q - e 三维空间中反映试样应力应变关系和破坏的一些曲线和曲面, 分析研究这些“线”和“面”提出了状态边界面概念。同时指出, 如果作其他应力路径试验, 应力“点”不会落在 p - q - e 三维空间中这些面所包含的范围之外。下面将叙述这些“线”和“面”的几何特征和物理意义, 简要阐明状态边界面的概念。

1. 临界状态线 (CSL)

Roscoe 等人研究正常固结粘土试样各向等压固结试验及各向等压固结后的排水 (CD) 和不排水 (CU) 的常规三轴压缩试验的破坏状态发现, 破坏

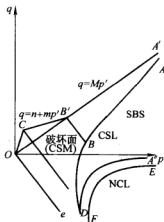


图 6-22 Roscoe 试验曲线

$$q = Mp' \quad (6-87)$$

无论以何种加载路径,当应力状态达到临界状态线(CSL)时试样破坏,即试样破坏与到达破坏线的应力路径无关。当应力点处于临界状态线(CSL)上,材料只发生剪切变形但不发生体积变形。图 6-22 中 NCL 为正常固结土等向压缩曲线(EF 线)。

对于正常固结粘土, 临界状态线 (CSL) AD 与 $p'-q$ 平面上的投影 AO 所构成的面称作临界状态面 (CSM), 或称为破坏面。它是试样破坏时的应力点所构成的面, 不可能有超越该面的任何应力点存在。该面与平行于 $p'-q$ 平面的交线具有同样斜率 M , 即临界状态面 (CSM) 是个满足 $q = Mp'$ 关系的平面。

土常规三轴试验当 $\sigma_3 = 0$ 时, 其强度 $q = \sigma_1 = 2c$, $p' = \frac{1}{3}\sigma_1 = \frac{2}{3}c$, 因此无拉力墙的斜率为 1:3。对于正常固结粘土, Hvorslev 面与无拉力墙就自然退化为临界状态面 (CSM), 或统一称为破坏面。

排水 (CD) 和不排水 (CU) 的常规三轴压缩试验路径随固结压力 p_c 变化的轨迹所构成的 $p-q-e$ 三维空间曲面称为状态边界面 (SBS), 也称 Roscoe 面, 如图 6-22 中所示的 $ADEF$ 面。Roscoe 面的主要性质是: 在 $p-q-e$ 空间中 Roscoe 面是惟一的; 不可能出现超越 Roscoe 面的应力状态, 这也是称为状态边界面的由来; 沿 Roscoe 面移动的应力路径除了沿屈服曲线移动不产生塑性体应变

(属于中性变载)外都将可能产生塑性剪应变和塑性体应变。

4. 弹性墙与屈服曲线

在 p - q - e 空间, 从正常固结线上某一点 G 开始以平行于 q 轴的直线为母线沿回弹(膨胀)曲线移动, 与 Roscoe 面和破坏面相交的曲面 GHI 称为弹性墙(简称 EW 墙), 而该面与 Roscoe 面相交的空间曲线称为屈服曲线, 见图 6-23。这样的弹性墙与屈服曲线有无数个。弹性墙在 e - p 平面上的投影就是回弹(膨胀)曲线 GI , 当应力点在弹性墙面内变化时, 只产生少量弹性变形不产生塑性变形。屈服曲线可在 p' - q 平面上得到投影, 仍称为屈服曲线或称屈服轨迹, 如图 6-24 所示, 该曲线的函数即屈服方程。

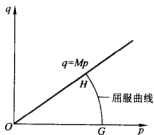


图 6-24 屈服曲线

5. 统一状态边界面

如图 6-22 所示, 由 Roscoe 面、Hvorslev 面与无拉力墙所包围的面称为统一状态边界面。其中临界状态线是分隔 Roscoe 面与 Hvorslev 面的脊线, 它的梯度和高度随平均有效法向应力的增加而增加。如上所述, 统一状态边界面是以临界状态线为脊线由 Roscoe 面、Hvorslev 面与无拉力墙所包围的 p 轴方向开口的“封闭”面, 土样的应力状态只可能在该封闭面内或封闭面上, 而永远不可能超越该“封闭”面。

6.4.2 剑桥 (Cam) 模型

设材料服从相关连流动法则, 即 $Q = f = \phi$ 。故有

$$d\epsilon_v^p = d\lambda \partial f / \partial p, \quad d\epsilon_s^p = d\lambda \partial f / \partial q \quad (6-88)$$

根据屈服曲线的性质有:

$$df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq = 0 \quad (6-89)$$

根据上两式得

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = - \frac{dq}{dp} \quad (6-90)$$

塑性功增量表达为

$$dW^p = p d\epsilon_v^p + q d\epsilon_s^p \quad (6-91)$$

由于沿屈服曲线 $d\epsilon_v^p = 0$, 即 $\epsilon_s^p = \text{常数}$, 故塑性功增量

$$dW^p = Mq d\epsilon_s^p \quad (6-92)$$

令式 (6-91)、式 (6-92) 两式相等, 则

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = M - \frac{q}{p} \quad (6-93)$$

根据式 (6-90)、式 (6-93), 得到微分方程

$$\frac{dq}{dp} - \frac{q}{p} + M = 0 \quad (6-94)$$

解该微分方程, 并应用屈服曲线上边界条件, $q=0$ 时 $p=p_c$, 得屈服方程

$$f = \frac{q}{Mp} + \ln p - \ln p_c = 0 \quad (6-95)$$

式中 $\ln p_c$ ——实际上就是硬化函数。

屈服方程在 $q-p$ 平面上是弹头形。

修正的剑桥模型假定如下

$$dW^p = \sqrt{(p d\epsilon_v^p)^2 + (M p d\epsilon_s^p)^2} \quad (6-96)$$

用上面推求屈服方程同样的思路, 得

$$f = \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2}\right) p - p_c = 0 \quad (6-97)$$

适当改写式(6-97), 有

$$f = \left(\frac{p - p_c/2}{p_c/2}\right)^2 + \left(\frac{q}{M p_c/2}\right)^2 - 1 = 0 \quad (6-98)$$

显然, 屈服方程在 $q-p$ 平面上是椭圆形, 并且也显示了该椭圆的位置, 其中 p_c 是硬化参数。根据各向等压固结的压缩和回弹曲线, 可得总体积应变和弹性应变分别为

$$\epsilon_v = \frac{\lambda}{1 + e_0} (\ln p_c - \ln p_1) \quad (6-99)$$

$$\epsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} (\ln p_c - \ln p_1) \quad (6-100)$$

其中, p_1 为初始应力。于是有塑性体积应变

$$\epsilon_v^p = \epsilon_v - \epsilon_v^e = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} (\ln p_c - \ln p_1) \quad (6-101)$$

从而

$$p_c = p_1 \exp\left(\frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \epsilon_v^p\right) = H(\epsilon_v^p) \quad (6-102)$$

有了屈服方程, 硬化模量, 即可按上节所述确定弹塑性矩阵。剑桥模型实际上存在假定: 屈服只与 p 、 q 有关, 与第三应力不变量或应力洛德角无关; 硬化参数为 ϵ_v^p , 由于一条屈服曲线仅对应着惟一的 p_c 值, 因而也可将 p_c 看作硬化函数, 这实际上等于假设硬化函数

$$H = H(\epsilon_v^p) = p_c \quad (6-103)$$

6.4.3 椭圆—抛物双屈服面模型

剑桥弹塑性模型是单屈服面模型, 且只能反映剪缩, 不能反映剪胀。事实

上, 土体受力后不但发生体积屈服而且也可能发生剪切屈服, 并且有时产生剪缩有时又可能产生剪胀。因此单屈服面模型是有缺陷的, 不能概括土体应力变形的基本特征。相比较而言, 双屈服面模型能够较好地克服单屈服面模型具有的缺陷, 殷宗泽提出的椭圆—抛物双屈服面模型是代表性模型之一。

1. 屈服方程 f_1 和 f_2

如图 6-25 所示, 殷宗泽假定, 土体的塑性变形由两部分组成: 一是与压缩相联系, 再是与膨胀相联系。从而导出与土体压缩相联系的屈服方程 (f_1) 和与膨胀相联系的屈服方程 (f_2) 分别为

$$f_1 = p + \frac{q^2}{M_1^2 (p + p_r)} - \frac{h\varepsilon_v^p}{1 - \varepsilon_v^p} p_a = 0 \quad (6-104)$$

$$f_2 = \frac{\alpha q}{G} \sqrt{\frac{q}{M_2 (p + p_r)}} - q = \varepsilon_s^p \quad (6-105)$$

式中 p_a ——大气压力; $p_r = \cot \varphi$;

G ——弹性剪切模量, 回弹情况下 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, E 为弹性模量, 假定回

弹时模量为加荷时非线性模量 E_l 的两倍, 即 $E = 2kp_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$, 假定

回弹时土的泊松比为常数, 即 $\mu = 0.3$, 于是有

$$G = \frac{1}{1.3} kp_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (6-106)$$

如图 6-25 所示, 体积屈服轨迹和剪切屈服轨迹将 p — q 平面分成 A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 共四个区, p 、 q 的变化可能使应力点落在不同的区。 A_0 是弹性区, 在该区内, 相对于相继屈服面上的应力点 p 、 q 都处于回弹状态, 该区内不发生塑性变形; 在 A_1 区, 为仅与第一屈服有关的塑性区; A_2 区与第二屈服有关的塑性区; 在 A_3 区, 两种屈服所引起的塑性变形同时存在。设 N 点是当前应力状态, 当 q 不变而减小 p , 则应力状态落入 A_2 区, 则同时产生塑性剪应变和膨胀应变; 若 q 不变而增大 p , 则应力状态落入 A_1 区, 则体积变形是压缩的; 若 p 不变而增大 q 或 p 、 q 同时增大, 则应力状态落入 A_3 区, 则产生塑性剪应变及因 f_1 引起的压缩应变和因 f_2 引起的膨胀应变, 压缩应变和与膨胀应变叠加后是压缩还是膨胀, 就看那一

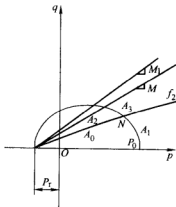


图 6-25 椭圆—抛物线双屈服面模型

个占主导，这将取决于相应参数。

2. 模型参数确定

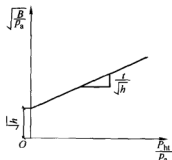
模型中含有参数 M_1 、 M_2 、 h 、 t 、 a 、 k 、 n 、 c 、 φ 共九个参数，由常规三轴试验确定。其中 c 、 φ 用排水试验强度指标， k 、 n 的确定同 Duncan 双曲线模型，其余参数用经验方法确定。

令 $p_{ht} = p + \frac{q^2}{M_1(p + p_r)}$ ，将式 (6-104) 改写为

$$\epsilon_v^p = \frac{p_{ht}}{hp_a + tp_{ht}}, \text{ 两边取微分, } d\epsilon_v^p = \frac{hp_a dp_{ht}}{(pp_a + tp_{ht})^2}$$

令 $B = \frac{dp_{ht}}{d\epsilon_v^p}$ 则

$$\sqrt{\frac{B}{p_a}} = \sqrt{h} + \frac{t}{\sqrt{h}} \frac{p_{ht}}{p_a} \quad (6-107)$$



计算 B ，根据式 (6-107) 点绘 $\sqrt{\frac{B}{p_a}}$ 与 $\frac{p_{ht}}{p_a}$ 的关系

图 6-26 参数 h 、 t 的推求

曲线，它们近似为一直线，得到该直线的截距 \sqrt{h} 和斜率 $\frac{t}{\sqrt{h}}$ ，联解即可求出 h 和 t ，见图 6-26

$$M_1 = (1 + 0.25\beta^2)M \quad (6-108)$$

式中， $M = \frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi}$ ， β 为应力水平 $S_L = 75\%$ 时体积应变与轴向应变之比，取各试验曲线 β 的平均值。将式 (6-105) 转换为

$$\frac{p + p_r}{q} = \frac{a^2}{M_2} \left(\frac{q}{G\epsilon_v^p} \right)^2 + \frac{1}{M_2} \quad (6-109)$$

式中 ϵ_v^p 可按下面经验公式估算

$$\epsilon_v^p = (0.3 - 0.1d)\epsilon_a \quad (6-110)$$

d 为 $\epsilon_v - \epsilon_a$ 曲线中应力水平从 75% 到 95% 一段的斜率，取各试验曲线的平均值， d 为负表示剪胀。根据不同固结压力 σ_3 的试验结果，在同一图上点绘 $\frac{p + p_r}{q}$ 与 $\left(\frac{q}{G\epsilon_v^p} \right)^2$ 关系，它们近似成一条直线。拟合该直线，得到

截距 $\frac{1}{M_2}$ 和斜率 $\frac{a^2}{M_2}$ ，从而求出参数 M_2 和 a ，见图 6-27。一般 M_1 、 M_2 都略大于式 (6-87) 中的 M 。

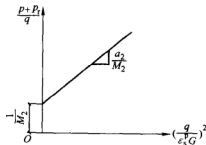


图 6-27 参数 M_2 、 a 的推求

由于靠经验公式确定的参数难以适应各

种土,对某些土可能存在一定误差,主要是 h 和 a 。因此可用所得参数模拟逐级加荷计算并与试验曲线比较加以检验,必要时适当修正参数再模拟计算进行检验。

6.4.4 弹塑性模型讨论

至今,所能见到的弹塑性模型数以百计,多数模型是依据于传统的塑性本构理论的假设和概念即传统的屈服面理论基础建立的,包括单屈服面模型和一些多屈服面模型,估且称为经典屈服面理论模型。剑桥模型、黄文熙等的清华模型、沈珠江的南水模型、魏汝龙模型、殷宗泽的双屈服面模型等都是依据于经典屈服面理论建立的。有一些模型则不用屈服面理论,例如内时模型、分部屈服模型、边界面理论模型等。不论那种模型,总是试图更完美地描述土体的变形与破坏。应该指出,由于土的复杂性和模型理论的不完善,目前所见到的各种模型都不能够概括各类土和各种应力路径,也就难以全面地描述土体的应力应变性质。模型理论存在争论是正常的,追求建立起能够概括各类土和适应各种应力路径的统一模型是不现实的。经大量的试验研究和实践应用来发展或完善理论,建立针对各类土的适用模型可能是目前本构模型研究的迫切任务,甚至于建立针对某类土并适应某些应力路径范围的实用模型也很有意义的。

6.5 土与结构接触面模型

在各类工程中,常常会遇到土体与结构的相互作用问题,例如土体与挡土结构、土体与桩、土体与防渗墙的相互作用,以及混凝土面板坝的面板与垫层之间的相互作用等。接触面模型则是研究土与结构相互作用的核心课题。接触面两侧的不同材料(土与结构)的物理力学性质相差很大,在受荷载后,力通过接触面相互传递,交界面处变形不一致,同时,接触面上的受力变形形态又影响到土体和结构材料中的应力变形状态。分析土体与结构的相互作用时,除了根据土体与结构的特性,分别采用不同的应力应变关系(本构模型)外,对于土体与结构间的接触面,必须给以特殊的注意。合理的计算模型和参数才能反映接触面上的受力变形机理和剪切破坏特征,也才能够保证土体和结构应力变形计算结果有可靠的精度。

长期以来,许多中外学者在接触面的试验仪器及试验方法、本构模型等方面进行了诸多的研究。目前应用的接触面模型可分为两类,即无厚度的 Goodman 单元模型和有厚度的 Desai 薄层单元模型。确定这两个模型参数的试验仪器有盒式直剪仪、扭剪仪、单剪仪等,其中因直剪试验简单而常用于确定 Goodman 单元模型参数,也用于确定 Desai 薄层单元模型参数;而单剪试验用于测定有厚度的 Desai 薄层单元模型参数又有其独到的优点。

6.5.1 Goodman 无厚度单元模型

Goodman 等人提出的接触面单元无厚度, 在其局部坐标系下, 应力与相对位移之间的关系可以用矩阵表示: $\{\sigma\} = [k_0] \{\omega\}$ 。

二维问题:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_s \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (6-111)$$

其中

$$K_s = K_1 \gamma_w \left(\frac{\sigma_n}{p_a} \right)^n \left(1 - \frac{R_f \tau}{c_0 + \sigma_n \tan \varphi_0} \right)^2 \quad (6-112)$$

三维问题:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{sxy} & 0 & 0 \\ 0 & K_{sxz} & 0 \\ 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{xy} \\ w_{xz} \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (6-113)$$

其中

$$K_{sxy} = K_1 \gamma_w \left(\frac{\sigma_n}{p_a} \right)^n \left(1 - \frac{R_f \tau_{xy}}{c_0 + \sigma_n \tan \varphi_0} \right)^2 \quad (6-114)$$

$$K_{sxz} = K_1 \gamma_w \left(\frac{\sigma_n}{p_a} \right)^n \left(1 - \frac{R_f \tau_{xz}}{c_0 + \sigma_n \tan \varphi_0} \right)^2 \quad (6-115)$$

式中 K_1 、 R_f ——材料的试验参数;

c_0 、 φ_0 ——接触面上的粘结力、外摩擦角;

p_a ——大气压力;

γ_w ——水的重度。

K_s 与 K_{sxy} 、 K_{sxz} 为单位长度非线性切向劲度系数; K_n 为单位长度法向劲度系数。 K_n 根据土与结构材料性质和接触面的拉压情况按经验取值, 当接触面受压时, 为了避免两侧的普通单元相互嵌入, K_n 取一个特别大的值, 其取值范围在 $10^7 \sim 10^9 \text{ ton/m}^3$ 之间; 而当接触面受拉时, 为了避免两侧的普通单元相互嵌脱离 K_n 则取一个很小的值, 例如取 $10^1 \sim 10^2 \text{ ton/m}^3$ 。

K_s 中的参数 K_1 、 n 、 R 、 c_0 、 φ_0 则由直剪试验, 按 $\tau-\omega_s$ 双曲线模型拟合确定。直剪试验确定模型参数的方法与过程是: 模拟实际, 制备土样和结构 (材料和接触面糙率模拟), 下盒放模拟结构材料, 上盒放土样。试验时, 如同土的直剪强度试验一样, 在下盒施加剪切推力, 即沿接触面施加剪应力 τ , 量测上下盒相对位移 ω_s , 建立 $\tau-\omega_s$ 的关系, 从而反映接触面上力的传递性质。 $\tau-\omega_s$ 关系曲线可采用 Clough 和 Duncan 等人所提出的剪应力 τ 与相对错动位移 ω_s 之间的双曲线模型加以描述。 K_s 或 K_{sxy} 、 K_{sxz} 中参数 K_1 、 n 、 R 、 c_0 、 φ_0 的整理方法和过程同 Duncan 非线性 $E-\mu$ 模型, 此处不再叙述。

对某些性质例如较为光滑的接触面,接触面就是几何上的接触界面。Goodman 单元模型能考虑接触面变形的非线性特性,能较好地反映接触面切向应力和切向变形的发展。其切向劲度系数 K_n 中的各个参数易于确定,可以通过常规直剪试验简便地得到,并且在一定程度上能反映接触面的剪切特性。因此长期以来,一直得到广泛应用。但是 Goodman 单元模型也具有较大的缺点:主要是由于单元无厚度,在受压时就会使两侧土与结构的普通单元相互嵌入,或受拉时又彼此脱离,从而不得不在计算过程中用调整 K_n 的取值来解决。 K_n 的取值有较大的人为任意性,只要法向相对位移有一微小的误差,因 K_n 的取值的随意,就会使法向应力 $\sigma_n = K_n w_n$ 产生较大的差异,所算得的 σ_n 也就难以保证合理,进一步地将影响切向劲度系数 K_n 计算的合理性。在分级计算时,这种误差可能逐级积累从而使计算结果严重失真,并且还无法评判其精度。

6.5.2 Desai 薄层单元模型

接触面两侧土与结构的变形不一致,在土体一侧产生剪切变形较大的薄层称为剪切错动带。事实上土与结构的相对滑动位移不可能仅仅发生在接触界面上,它必然会在接触面土体一侧一定厚度范围内形成一个剪切错动带。土与结构通过该剪切错动带发生力的传递,采用有厚度接触面单元模型就是试图模拟这个剪切错动带,从而比较好地克服无厚度 Goodman 单元模型的缺点。也正是用有厚度的薄层单元来分析接触面,而不用 Goodman 单元的原因之一。因此,研究接触面不能仅仅局限于接触界面上,应该研究剪切错动带的特性。以二维问题为例,Desai 建议在本构矩阵中,将法向和切线分量分开来考虑,即。

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sn} \\ D_{ns} & D_{nn} \end{bmatrix} \quad (6-116)$$

式中 D_{ss} ——剪切分量;

D_{nn} ——法向分量, D_{sn} 和 D_{ns} 为考虑耦合效应的分量。当限于试验手段没有测定法向和切线的耦合影响时,Desai 建议取 D_{sn} 和 D_{ns} 为 0。法向分量可表示为

$$D_{nn} = \lambda_1 (D_{nn})_i + \lambda_2 (D_{nn})_g + \lambda_3 (D_{nn})_{st} \quad (6-117)$$

式中下标 i、g、st 分别表示接触区材料、岩土材料和结构材料。Desai 假定:对于静力问题 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; 对于动力问题,假定 $\lambda_1 = 0.75, \lambda_2 = 0.25, \lambda_3 = 0$ 。

1. 直剪试验确定剪切模量参数

本构矩阵中 D_{ss} 即为非线性剪切模量 G_t , 计算公式为

$$G_t = K_n t \quad (6-118)$$

K_n 中计算参数同 Goodman 单元模型,即用直剪试验得到的 $\tau-w_n$ 关系曲线确定。

由式 (6-118) 可以看出单元厚度 t 对 G_1 的大小有直接影响, 当 t 取得太大, 与实体单元宽度 B 处于同一数量级时, 接触面单元与普通单元就没有什么差别了; 当 t 取得太小时, 接触面错动有可能不符合实际, 也会使相对剪切位移的计算产生误差。Desai 建议了 t 的取值范围

$$t = (0.01 \sim 0.1) B \quad (6-119)$$

应该指出, Desai 建议 t 的取值变化范围较大, 也有一定的随意性; 另外直剪试验未能反映和描述剪切错动带现象。关于 t 的取值将在后面作专门讨论。

2. 单剪试验确定剪切模量参数

利用单剪试验来进行接触面的研究能有效地克服直剪试验的缺陷。主要通过单剪试验可以得到接触面剪切错动带内剪应力—剪应变的关系。用 $\tau-\gamma$ 关系曲线取代常规的 $\tau-\omega_s$ 关系曲线来描述接触面剪切错动带的应力应变, 从而揭示土与结构通过接触面发生的应力变形传递规律。其本构矩阵表达为 $\{\tau\} = [D]\{\gamma\}$ 。

单剪试验如简图 6-28 所示。试验时, 先施加某法向力 V , 测定压缩量 S , 然后逐级施加剪切力 T 测定剪位移 u 、法向变形 v , 则平均剪应力 τ 、平均剪应变 γ 、平均法向应力 σ_n 和法向应变 ϵ_n 分别由实测量表示为: $\tau = \frac{T}{A}$, $\gamma = \frac{u}{t}$, $\sigma_n = \frac{V}{A}$, $\epsilon_{nn} = \frac{S}{t}$, $\epsilon_{ns} = \frac{v}{t}$ ($\epsilon_n = \epsilon_{nn} + \epsilon_{ns}$)。这些变量中: A 为接触面的面积, 由于并未限制剪切破坏面的位置, 因此, 最后破坏的位置究竟在土体内还是在理论接触界面上, 与土体材料以及接触面粗糙程度有关。面对现实问题时, 这就提供了一个判断剪破坏面位置从而拟定薄层单元厚度 t 的依据。根据单剪试验可建立 $\tau-\gamma$ 及 $\epsilon_{nn}-\sigma_n$ 关系曲线以及考虑剪胀 (剪缩) 的关系曲线 $\epsilon_{ns}-\tau$ 或 $\epsilon_{ns}-\gamma$ 。有了这些关系可较好地模拟接触面剪切错动带的变形特征。若假定 $\tau-\gamma$ 关系为双曲线

$$\tau = \frac{\gamma}{a + b\gamma} \quad (6-120)$$



图 6-28 接触面剪切错动带
a) 剪切示意图 b) 接触面的变形

则可以建立接触面薄层单元非线性接触面的切向剪切模量 G_t , 即

$$G_t = \left(1 - R_f \frac{\tau}{c_0 + \sigma_n \tan \varphi_0} \right)^2 k p_a \left(\frac{\sigma_n}{p_a} \right)^n \quad (6-121)$$

式中包含五个参数: c_0 、 φ_0 为接触面上的凝聚力和外摩擦角, k 、 n 、 R_f 为非线性参数, 可用 Duncan 非线性模型确定 E 中参数相同的整理方法和过程。非线性剪切模量 G_t 可以描述接触面切向滑动情况。

3. 考虑剪胀影响的接触面模型

考虑到薄层单元有一定的厚度, 其法向将可能出现压缩或张拉现象, 可以通过法向压缩模量模拟。根据测定的 $\epsilon_m - \sigma_n$ 关系曲线以及考虑剪胀(剪缩)的 $\epsilon_m - \tau$ (或 $\epsilon_m - \gamma$) 关系曲线所拟合的函数(不同的土可能表现为不同的函数形式)可得法向应变增量的如下表达式:

$$d\epsilon_n = d\epsilon_m + d\epsilon_{ns} = \frac{1}{E_m} d\sigma_n + \frac{1}{G_{ts}} d\tau \quad (6-122)$$

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_n \\ d\epsilon_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/G_t & 0 \\ 1/G_{ts} & 1/E_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} \quad (6-123)$$

式中 G_t 、 G_{ts} 和 E_m ——非线性切向剪切模量、法向剪缩(剪胀)模量 ($\epsilon_{ns} - \tau$ 的导数值) 和法向压缩模量。

当接触面的法向受拉(出现厚度大于 t) 时, E_m 可取一个很小值。与 Goodman 单元不同的是 E_m 取值误差不会累积成为系统误差。目前接触面单剪试验是模拟接触面的应力应变特性较为简便易行的方法。其中 G_t 、 G_{ts} 和 E_m 完全由试验测得的应力应变曲线所决定, 不必受某种线型的限制。

对于三维问题也不难写出矩阵 $[D]$ 的形式, 应注意的是接触面的法向剪胀/剪缩正应变 ϵ_m 同时受接触面两个方向剪应力 τ_{xy} 和 τ_{yz} 的影响, 而不能简单地叠加起来。两个剪切方向 G_{ts} 可引用剪胀影响系数 η_{xy} 、 η_{yz} 进行分配并使 $\eta_{xy} + \eta_{yz} = 1$ 。应该指出, 考虑剪胀的耦合本构矩阵是非对称的, 会增加方程求解的工作量。

4. 接触面抗剪强度取用

单剪试验表明, 剪破面发生的位置与土料性质及其接触面的性质有关。当接触面较光滑而接触界面上的抗剪强度(参数 c_0 、 ϕ_0) 小于土体内的抗剪强度(参数 c 、 ϕ) 时, 剪切破坏发生在接触界面上。当接触界面较粗糙同时土体内的抗剪强度(参数 c 、 ϕ) 小于接触界面上的抗剪强度(参数 c_0 、 ϕ_0) 时, 剪破面位置总是发生在土体的一定范围内, 这说明土体与结构接触界面之间具有一定的咬合力, 它能带动附近的土体形成一个剪切错动带, 接触面性质使剪破发生在土体内。不论剪破面发生的位置如何, 接触面性质影响结构与土体之间力的传递, 这就体现了接触面的特性, 而并非仅仅是土体或结构单一的性质。在计算非线性切向剪切模量时, 应根据模拟接触界面粗糙程度的试验结果, 采用对应的抗剪强

度参数 (c_0 、 ϕ_0) 或 (c 、 ϕ)。

5. 薄层单元厚度讨论

接触面薄层单元厚度 t 的大小反映薄层剪切错动带的范围, t 的取值影响到对接触面特性的准确模拟, 也就势必影响计算结果, 因此有限元计算中合理地选择 t 是十分重要的。接触面薄层单元厚度 t 的取值除了参考 Desai 建议值外, 用单剪试验确定薄层单元厚度可提供比较可靠的依据。单剪试验时除了测定应力应变曲线外还可观测到试样最终剪破(滑动)面的位置, 破坏面的位置与法向压力有关, 也与土料性质及接触面粗糙程度有关。试验表明: 接触面愈光滑, 剪破面与几何接触界面之间的厚度愈小, 当接触面几乎完全光滑时(例如土与硬塑料或钢板之间)最终剪破面的位置就是几何接触界面即 $t = 0$, 这种情况适合采用无厚度接触面单元模拟; 接触界面愈粗糙, 则接触面上的抗剪强度愈高, 剪破(滑动)面愈可能发生在土体内且剪切错动带的厚度(即 t 值)愈大; 接触面单元长度方向划分的尺寸愈大, 为使计算的剪切错动符合实际(剪切错动带 γ 值合理)薄层单元厚度 t 也应该稍大, 这就是 Desai 建议取 $t = (0.01 \sim 0.1)B$ 的基本思路。

参 考 文 献

- 1 Wood D M. Soil Behavior and Critical State Soil Mechanics [M], UK: Cambridge University Press. 1990
- 2 沈珠江著. 理论土力学. 北京: 中国水利水电出版社, 2000
- 3 黄文熙. 硬化规律对土弹塑性应力应变模型影响研究. 岩土工程学报, 1980, 2 (1): 1 ~ 11
- 4 黄文熙, 濮家骝, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数. 岩土工程学报, 1981, 3 (3): 19 ~ 26
- 5 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式. 岩土工程学报 [J], 1980, 2 (2): 11 ~ 19
- 6 沈珠江. 土的三重屈服面应力应变模式. 固体力学学报 [J], 1984 (2): 163 ~ 174
- 7 殷宗泽. 一个土体双屈服面应力—应变模型. 岩土工程学报 [J], 1988, 10 (4): 64 ~ 71
- 8 钱家欢, 殷宗泽. 北京: 土工原理与计算. 第2版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996
- 9 张学言. 岩土塑性力学. 北京: 人民交通出版社, 1993
- 10 龚晓南. 土塑性力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1999
- 11 Roscoe, K. H., Schofield, A. N., Thurairajah, A., Yielding of Clays in States Wetter than Critical, Geotechnique, 1963, 13 (3): 211 ~ 240
- 12 卢廷浩, 鲍伏波, 接触面薄层单元耦合本构模型 [J], 水利学报, 2000 (2): 71 ~ 75
- 13 张冬霖, 卢廷浩. 一种土与结构接触面模型的建立及应用. 岩土工程学报, 1998 (6): 62 ~ 66

第7章 岩土极限分析法

对于岩土承载力或稳定性问题,传统分析方法主要有三类:一类是以弹塑性有限元法为代表的数值方法,即根据应力应变关系、具体问题的初始与边界条件、荷载历史逐步求得问题的解。由于微分方程的复杂性;岩土本构关系的多样性;弹塑性区分界线的不确定性等因素导致弹塑性法计算过程比较复杂。另一类是以条分法为代表的极限平衡法,它是将结构物分成若干条块,根据力的平衡理论求解。虽然条分法简单易懂,并在工程中广泛应用,但是,由于各条块之间的相互作用力复杂,从而影响计算结果的准确性;另外,平衡微分方程、流动法则也不能在岩土中的每一点得到满足。再一类是滑移线理论。对许多岩土结构物来讲,有时并不需要知道应力和应变随外荷载如何变化,只需要求出最终达到塑性流动状态(即开始产生无限制塑性流动)时所对应的破坏荷载或稳定性程度。在这种思想的指导下,Drucker 和 Prager 把静力场和速度场结合起来并提出极值理论,建立岩土结构物的极限分析方法,W.F.Chen 为岩土结构物的极限分析理论奠定了基础。如今,极限分析方法在岩土工程中广泛应用。

本章内容分为以下四个部分:

- 1) 概述极限分析法在岩土工程领域中的研究与应用。
- 2) 在线性 Mohr-Coulomb 破坏准则的基础上,介绍极限分析法中的上、下限定理。
- 3) 在非线形破坏准则的基础上,介绍岩土极限分析的一些最新成果,并把它总结为:岩土极限分析非线性理论。
- 4) 总结岩土极限分析法中存在的主要问题,供进一步深入探讨。

7.1 岩土极限分析法研究概述

极限分析法是将岩土看成理想刚塑性体或理想弹塑性体,在虚功率原理基础上建立起来的分析方法,它包括上限定理和下限定理。通过上下定理的分析,可以近似得到极限荷载的大小或稳定性程度,而且还可以知道误差的范围。虚功率原理表明:对于任意一组静力允许的应力场和任意一组机动允许的速度场,外力的虚功率等于物体内能消散功率。

上、下限定理都是由虚功率原理可推导出的。上限定理为:在所有的机动允许的塑性变形速度场相对应的荷载中,极限荷载为最小。由虚功率原理可推导出下限定理为:当物体产生塑性变形达到极限状态时,在给定速度边界上,真实表

面力在给定的速度上所做的功率恒大于或等于其他任意静力允许应力场所对应的表面力在同一给定速度上的功率。在所有与静力允许的应力场相对的荷载中，极限荷载最大。

由下限定理和静力允许应力场（在岩土结构物内部满足平衡条件、处处不违反屈服条件与相应的边界条件），可以确定简单问题的下限解，如条形基础的极限承载力、不能抗拉土体的竖直临界高度、圆形基础的极限承载力。由上限定理和机动允许速度场（在岩土结构物内部满相关联流动法则、相应的速度边界条件、由速度场求得的应变率满足不可压缩条件），可以确定简单问题的上限解，如：条形基础的承载力，二维边坡的稳定性，竖直边坡的临界高度，圆形基础的承载力。上述是岩土工程中一些简单问题的极限分析。近年来，Soubra 建立一种新的速度场，利用计算机手段，研究土力学中的一些基本问题，得出了一些有益的半解析解，使解析解的研究向前迈进一步。

实际上，许多岩土问题具有复杂性，如：岩土边界形状不规则、边界受力复杂、岩土层状分布等，此时人工建立的应力场或速度场很难满足问题的需要。为此，人们致力于开辟另一种途径，即在极限分析理论基础上，应用有限单元法求解。

7.1.1 极限分析有限元法

应用有限元和极限原理相结合的刚塑性有限元法为求解岩土结构物承载力或稳定性问题提供了新的方法。它克服了人工建立静力允许应力场和机动允许速度场的困难，最优的上、下限解分别通过优化方法得到。这种上限定理有限元与一般以结点位移为未知量的常规有限元的主要区别在于：

1) 上限定理有限元以结点速度为未知量。Jiang 等学者采用如图 7-1 所示的结点速度，即同一位置上结点速度相同；Sloan 等学者采用如图 7-2 所示的结点速度，即同一位置上由于间断线存在，结点速度不连续。例如图 7-2 中的①结点速度 (u_1, v_1) 与②结点速度 (u_2, v_2) 不相等，③④结点也是如此。近年来，这两种情况都已经成功用于实践。

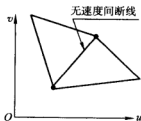


图 7-1 Jiang 等采用的结点速度

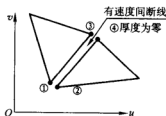


图 7-2 Sloan 等采用的结点速度

2) 速度间断线上, 对于 Mohr-Coulomb 材料速度间断线上的切向和法向速度都不连续; 对于 Tresca 材料只有切向速度不连续。

3) 对于 Tresca 材料, 单元要满足不可压缩条件, 即: $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$ 。这就要求在单元划分时, 要合理布置各单元形状。Jiang 与 Sloan 等学者采用四个单元组成矩形, 公共单元结点位于矩形对角线的交点上, 这样满足不可压缩条件。

4) 单元在破坏前无任何变形产生。

在物体 Ω 上, 若存在一组速度场 u_i , 满足以下条件, 则称 u_i 为机动允许的速度场。在体积 Ω 内满足几何方程, 即

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7-1)$$

在边界上满足速度边界条件, 并在速度边界上使外力作正功。由上述定义可知, 物体处于极限状态时, 真实的速度场必定是机动允许的速度场; 但机动允许的速度场不一定是极限状态真实的速度场。

应用上限定理有限元法求解土工问题时, 速度场必须满足相关联准则和边界条件。在岩土结构物计算时常用 Mohr-Coulomb 屈服函数 F , 其表达式为

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi]^2 \quad (7-2)$$

这里 c 、 φ 是土的抗剪强度指标, 服从线性 Mohr-Coulomb 破坏准则。如果由 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 按塑性变形法则求出的应力 σ_{ij}^* 满足表达式 $F(\sigma_{ij}^*) < 0$, 那么理想刚塑性体处于稳定状态; 如果满足 $F(\sigma_{ij}^*) = 0$, 那么理想刚塑性体处于极限状态, 即处于开始产生无限制塑性流动状态。在物体 Ω 上, 应力 σ_{ij}^* 在相应的塑性应变率上所做的功率为

$$\dot{W}_1 = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \cdot \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (7-3)$$

假设该物体受到外荷载作用, 其中恒荷载为 $m_0(f_0, T_0)$, 活荷载 $m_1(f_1, T_1)$, m_0 、 m_1 是比例系数。在应力空间中 f_0 、 f_1 是体力, T_0 、 T_1 是面力, 对二维问题它们是 (x, y) 的函数; 对三维问题它们是 (x, y, z) 的函数。恒荷载与活荷载在极限分析时所消散的功率为

$$\dot{W}_2 = m_0 \int_{\Omega} f_0 u_{ij} d\Omega + m_1 \int_{\Omega} f_1 u_{ij} d\Omega + m_0 \int_S T_0 u_{ij} dS + m_1 \int_S T_1 u_{ij} dS \quad (7-4)$$

物体内部速度间断面(二维问题就转化为速度间断线)所消散的功率为

$$\dot{W}_3 = \int_A c \Delta V_i dA \quad (7-5)$$

根据上限定理, 建立能量消散率泛函数为

$$J(u_{ij}) = \dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 \quad (7-6)$$

对于任何一个机动允许速度场 u_{ij} , 若 $J(u_{ij})$ 小于零, 那么该物体将产生刚塑

性破坏状态;若存在一机动允许速度场 u_0 , 使得 $J(u_0)$ 取得最小值, 并且最小值为零, 那么相应于结构上的荷载就是极限荷载, 其大小为 $m_0(f_0, T_0) + m_1(f_1, T_1)$ 。这样上限定理优化的目标函数是

$$\text{Minimize } m_0(f_0, T_0) + m_1(f_1, T_1) \quad (7-7)$$

对天然边坡稳定性问题, 活荷载为零 ($m_1=0$), 土体自重 f_0 可能导致边坡失稳, 因此极限分析的目的是求得边坡处于极限状态时的最小值 m_0 ; 对基础承载力问题, 恒荷载是不变的 $m_0=1$, 活荷载是变化的, 随着外荷载的增加, 逐步达到极限状态, 因此极限分析的目的是求得基础处于极限状态时的最小值 m_1 。

7.1.2 优化方法

式 (7-7) 为极限荷载的目标函数, 它是优化理论中的规划问题。常用的优化方法主要有: 线性规划法和非线性规划法。

1. 线性规划法

Lysmer (1970) 是最早采用线性规划方法求解岩土结构物的承载力或稳定性的学者之一。在此基础上, Sloan、Ukrichon 等 (1998)、Yu 等 (1998)、Kim 等 (1999) 学者将此方法进一步推广使用。用线性规划求解时, 需要将屈服函数线性化。式 (7-2) 是以 $X = \sigma_x - \sigma_y$ 为横轴, 以 $Y = 2\tau_{xy}$ 为纵轴, 以 $R = 2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi$ 为半径的圆, 如图 7-3 所示。由于上限定理有限元的基本未知量是线性速度分量, 所以屈服准则需要线性化, 为此用一个外切正多边形逼近上述圆域。设正多边形的边数为 p , 在笛卡尔坐标系中, 第 k 边屈服条件的线性表达式为

$$F_k = A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + c_k \tau_{xy} - 2c \cos \varphi = 0 \quad (7-8)$$

这里 $A_k = \cos \alpha_k + \sin \varphi$, $B_k = -\cos \alpha_k + \sin \varphi$, $c_k = 2 \sin \alpha_k$, $\alpha_k = 2k\pi/p$, $k = 1, 2, \dots, p$ 。在用上限定理有限元求解岩土问题时, ①每个单元和速度间断线要服从相关

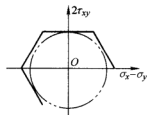


图 7-3 屈服条件线性化

流动法则; ②且岩土屈服函数 F 与塑性势函数相同; ③速度边界上要满足边界条件。根据这三个条件建立一系列的约束方程, 结合式 (7-7) 用线性规划方法求解最小值。

在线性规划中, 对于少量的有限单元和速度间断线, 采用最陡边有效集法是求解该规划问题行之有效的方法, 但随着计算范围的扩大, 优化变量从几百个增加到数万个; 从几何观点看, 线性规划问题的可行域是凸多面体, 基本可行解对应着它的顶点, 而可行域的顶点的个数一般随着问题维数的变大而成指数函数的增加。因此, 选择合适的优化方法尤为重要。沈卫平提出改进的迭代方法, 以减少迭代次数提高优化效率; 张丕辛在博士学位论文中提出无搜索数学规划算法,

这个算法采用逐步识别刚性区和塑性区,对刚性区和塑性区进行不同处理,以不断修正目标函数,并在文中证实了解的可行性和稳定性。

2. 非线性规划法

Jiang 是最早将非线性规划引入上限定理有限元的学者之一,并成功地解决了二维边坡稳定性问题以及基础承载力问题。该方法的主要原理是将拉格朗日增项法引进,使泛函数的极值最小化。对于泛函式 (7-6) 引进变量 w_{ij} , 使得 $\dot{\epsilon}_{ij} - w_{ij} = 0$, 则式 (7-6) 变为

$$J(u, w) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \cdot w_{ij} d\Omega - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 \quad (7-9)$$

与式(7-9)相对应的拉格朗日泛函数为

$$\bar{\lambda}_r \{ (u, w), \lambda \} = J(u, w) + \frac{r}{2} \int_{\Omega} (\dot{\epsilon}_{ij} - w_{ij})(\dot{\epsilon}_{ij} - w_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij} - w_{ij}) d\Omega \quad (7-10)$$

式中 $\dot{\epsilon}_{ij}, w_{ij}$ ——分别为 $\dot{\epsilon}$ 和 w 的分量;

λ_{ij} ——相应的拉格朗日系数;

r ——正数,如果 $r=0$,式(7-10)则为通常的拉格朗日函数形式。

在拉格朗日函数中引入增项可以提高求极值过程的收敛性与稳定性。求泛函 $\bar{\lambda}_r$ 的极值,也就是求一个解 $\bar{\lambda}_r \{ (u_0, w_0), \lambda_0 \}$, 使得 $\bar{\lambda}_r$ 取极值

$$\max_{\lambda} \bar{\lambda}_r \{ (u_0, w_0), \lambda \} = \bar{\lambda}_r \{ (u_0, w_0), \lambda_0 \} = \min_{(u, w)} \bar{\lambda}_r \{ (u, w), \lambda_0 \} \quad (7-11)$$

可以证明 $\dot{\epsilon}_0 - w_0 = 0$, 并且 u_0 也使泛函 $J(u_{ij})$ 取最小值。

总之,上限定理刚塑性有限元是一种崭新的数值方法,它有严格的理论基础,解决了人工建立速度场的难题,通过前人的研究成果可看出,应用该方法所得到的数值解是一种精确的解,与经典力学的理论解是一致的。这说明了上限定理刚塑性有限元法具有正确性,有着重要的理论意义和使用价值。从目前国内外的文献资料看,在极限分析中线性规划使用较多,非线性规划使用较少,但对某一计算区域,如果线性规划与非线性规划的单元数相同,那么优化时非线性规划所含的变量远小于线性规划,从这一角度看非线性规划比线性规划优越。随着计算范围的扩大,问题考虑的因素较多,非线性规划更好地显示出其日益重要的地位,它代表上限定理有限元的发展方向。

同理,下限定理有限元的基本未知量是应力场,为此用一个内接正多边形逼近上述圆域,在应力间断线、应力边界上建立一系列的约束方程,最后用优化方法寻求目标函数的最大值,详细过程可阅读文献 [30]。

7.2 基于 Mohr-Coulomb 破坏准则的上、下限定理

极限分析法是解决弹塑性体(或刚塑性体)处于极限状态的普遍定理,是运

用上限定理和下限定理求解极限荷载的一种分析方法。通过两个定理的分析，可以近似得到极限荷载值，而且还可以知道误差的范围。为了建立上限定理和下限定理，先介绍静力允许的应力场（简称静力场）和机动允许的位移速率场（简称机动场）两个基本概念。

7.2.1 静力允许的应力场

设有物体 V ，其表面 S 分为两个部分，一部分上的荷载和体积力分别为： T_i 与 F_i ，一部分是表面力为已知的边界 S_T ，其余部分为表面位移速率已知的边界 S_u 。若在此物体上，设定一组应力场 σ_{ij}^0 ，满足下列条件，则称 σ_{ij}^0 为静力允许应力场。

- 1) 在体积 V 内满足平衡方程，即

$$\sigma_{ij,j}^0 + F_i = 0 \quad (7-12)$$

- 2) 在边界 S_T 上满足边界条件，即

$$\sigma_{ij}^0 n_j = T_i \quad (7-13)$$

式中 n_j ——表面外法线的方向余弦。

- 3) 在体积 V 内不违反屈服条件，即

$$f(\sigma_{ij}^0) \leq 0 \quad (7-14)$$

由以上定义可知，物体处于极限状态时，其真实的应力场必定是静力允许的应力场；但静力允许应力场不一定是极限状态时真实的应力场。

7.2.2 机动允许的位移速率场

在物体 V 上，若设定一组位移速率场 \dot{u}_i ，满足以下条件，则称 \dot{u}_i 为机动允许的位移速率场。

- 1) 在体积 V 内满足几何方程，即

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (7-15)$$

- 2) 在边界 S_u 上满足位移边界条件，或速度边界条件，并使外力作正功。

由上述定义可知，物体于极限状态时，其真实的位移速率场必定是机动允许的位移速率场；但机动允许的位移速率场不一定是极限状态时真实的位移速率场。

7.2.3 关联流动规则

理想弹塑性体（或刚塑性体）塑性流动状态时，屈服应力与塑性应变之间没有直接的关系，屈服应力与相应的塑性应变率之间的关系可由相关联流动规则确定。塑性应变率分量之间的关系可表示为

$$\frac{\dot{\epsilon}_1^p}{\dot{\epsilon}_3^p} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} / \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \quad (7-16)$$

对于 Tresca 材料:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad (7-17)$$

代入式(7-16)得

$$\dot{\epsilon}_1^p / \dot{\epsilon}_3^p = -1 \quad (7-18)$$

对于 Coulomb 材料:

$$F = \sigma_1(1 - \sin\varphi) - \sigma_3(1 + \sin\varphi) - 2c \cos\varphi = 0 \quad (7-19)$$

代入式(7-16)得

$$\dot{\epsilon}_1^p = -(1 - \sin\varphi)\dot{\epsilon}_3^p / (1 + \sin\varphi) = \dot{\epsilon}_3^p \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (7-20)$$

Coulomb 材料屈服函数也可表示为

$$F = \tau - c - \sigma_n \tan\varphi = 0 \quad (7-21)$$

代入式(7-16)得 $\dot{\gamma}^p = -\cot\varphi \dot{\epsilon}_n^p$

式中 $\dot{\gamma}^p$ ——塑性剪应变率;

$\dot{\epsilon}_n^p$ ——法向应力 σ_n 方向塑性应变率。

7.2.4 虚功方程与虚功率方程

虚功原理表明: 对于一个连续的变形体, 任意一组静力允许的应力场和任意一组机动允许位移场, 外力的虚功等于内力的虚功, 即

$$\int_A T_i u_i^* dA + \int_v F_i u_i^* dv = \int_v \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^* dv \quad (7-22)$$

同理, 虚功率原理可表示为: 对于任意一组静力允许应力场和任意一组机动允许的位移速率场, 外力的功率等于物体内虚变形功率, 即

$$\int_A T_i \dot{u}_i^* dA + \int_v F_i \dot{u}_i^* dv = \int_v \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^* dv \quad (7-23)$$

如果物体内部存在速度间断时, 其虚功率方程可表示为

$$\int_A T_i \dot{u}_i^* dA + \int_v F_i \dot{u}_i^* dv = \int_v \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^* dv + \int_S (\tau - \sigma_n \tan\varphi) [\Delta v_t] dS \quad (7-24)$$

式中 S ——速度间断面;

$[\Delta v_t]$ ——速度间断面两侧切向速度的变化。

以上几个定理的证明可参考土力学有关书籍, 这里从略。根据虚功率方程可以证明极限分析中两个重要的定理, 即上下限定理。

7.2.5 上下限定理

下限定理: 当物体产生塑性变形达到极限状态时, 在给定速度边界 S_u 上,

真实的表面力在给定的速度上所作的功率恒大于或等于其他任意静力允许应力场所对应的表面力在同一给定速度上的功率。即在所有与静力允许的应力场相对的荷载中，极限荷载最大。

证：设 σ_{ij} 为真实的应力场，对应的表面力为 T_i ， \dot{u}_i 为真实的位移速率场，由几何方程求得真实应变率为 $\dot{\epsilon}_{ij}$ ，真实速度场中可能存在速度间断面 S_L ，其上的切向速度跃度为 $[\Delta v_i]$ ；在 S_u 上给定速度为 \bar{u}_i ，在 S_T 上给定表面力为 \bar{T}_i ，给定的体力为 F_i 。

由虚功率方程得

$$\int_V F_i \dot{u}_i dv + \int_S T_i \dot{u}_i dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv + \int_{S_L} c [\Delta v_i] dS_L \quad (7-25)$$

又设另一静力允许的应力场，对应的表面力为 T_i^0 ，由虚功率方程得

$$\int_V F_i \dot{u}_i dv + \int_S T_i^0 \dot{u}_i dS = \int_V \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{S_L} (\tau - \sigma_n \tan \varphi) [\Delta v_i] dS_L \quad (7-26)$$

上述两式相减得

$$\int_S (T_i - T_i^0) \dot{u}_i dS = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij} dv + \int_{S_L} [c - (\tau - \sigma_n \tan \varphi)] [\Delta v_i] dS_L \quad (7-27)$$

由 Drucker 公式得到

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (7-28)$$

由于 $c \geq \tau - \sigma_n \tan \varphi$ ，同时 $[c - (\tau - \sigma_n \tan \varphi)] [\Delta v_i] \geq 0$ ，即剪应力做正功率，得

$$\int_S (T_i - T_i^0) \dot{u}_i dS \geq 0 \quad (7-29)$$

于是下限定理得到证明。

上限定理：在所有的机动允许的塑性变形位移速率场相对应的荷载中，极限荷载为最小。

证：设 σ_{ij} 为物体达到极限状态的真实应力场，其对应的表面力为 T_i ， \dot{u}_i 为真实位移速率场，由几何方程求得的应变率为 $\dot{\epsilon}_{ij}$ ，真实速度场中可能有速度间断面 S_L ，其上的速度切向跃值为 $[\Delta v_i]$ ；体力为 F_i 。

另设一机动允许的位移速率场 \dot{u}_i^* ，对应的应变率为 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ ，应变速度场可能有间断面 S_L^* ，其上的切向速度跃值为 $[\Delta v_i^*]$ 。虚功率方程得

$$\int_V F_i \dot{u}_i^* dv + \int_S T_i \dot{u}_i^* dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dv + \int_{S_L^*} (\tau - \sigma_n \tan \varphi) [\Delta v_i^*] dS_L^* \quad (7-30)$$

在机动允许的位移速度场中，由 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 按塑性流动法则求出应力场 σ_{ij}^* ，由式(7-28)知

$$\int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq 0 \quad (7-31)$$

又 $\tau - \sigma_n \tan \varphi \leq c$, 则有

$$\int_{S_L} (\tau - \sigma_n \tan \varphi) [\Delta v_i^*] dS_L^* \leq \int c [\Delta v_i^*] dS_L^* \quad (7-32)$$

将式(7-31)、式(7-32)代入式(7-30)得

$$\int_v F_i \dot{\mu}_i^* dv + \int_s T_i \dot{\mu}_i^* dS \leq \int \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* + \int_{S_L} c [\Delta v_i^*] dS_L^* \quad (7-33)$$

由于在 S_T 上表面力 T_i 已知, 整个物体体力 F_i 已知, 式(7-33)右方的值只取决于所设机动允许的速度位移场 \dot{u}_i^* 。显然只有当 $\dot{u}_i^* = \dot{u}_i$ 时, 上式等号成立。上限定理得到证明。

7.3 岩土极限分析非线性理论及其应用

在岩土工程中广泛应用 Mohr-Coulomb 或 Tresca 破坏准则, 该破坏准则是线性破坏准则。实际上, 大量的岩土介质试验数据表明: 岩土破坏准则是非线性的, 而线性破坏准则是其中的一种特例。基于岩土非线性破坏准则, 本节在上限定理的基础上, 提出广义切线法计算外力的功与内能耗散, 以此建立目标函数与约束方程, 并根据非线性序列二次规划计算最小能量耗散, 从而确定最优的切线位置。在研究成果的基础上总结出: 岩土极限分析——非线性理论。在边坡稳定性方面, 应用理论所得到的结果与变分法的结果一致; 对存在竖直裂缝的边坡, 应用理论所得到的结果与下限解一致; 对主动或被动土压力问题, 应用理论所得到的结果与广义 Rankine 解一致。

7.3.1 问题的提出

在非线性破坏准则下, 岩土结构物承载力或稳定性的上限分析问题一直是岩土工程界的难点之一。较早期学者 Baker & Frydman (1983) 运用非线性破坏准则, 在变分原理的基础上, 对边坡附近的条形基础进行上限分析。Baker & Frydman 只给出了变分控制方程组, 而如何进行求解该方程组, 他们并没有进行研究。后来, Zhang & Chen (1987) 也是在变分原理的基础上, 采用“逆算法 (inverse method)”研究边坡在非线性破坏准则下的滑动面形状, 并给出边坡在各种坡角下的稳定性系数。在众多的科学文献中, 大多数学者都采用线性 Mohr-Coulomb 破坏准则, 这主要原因是: 传统的岩土结构物稳定性分析都是建立在线性 Mohr-Coulomb 破坏准则基础上。即, 求解岩土结构物的稳定性时, 抗剪强度指标 c 、 φ 的值是已知的。根据已知的 c 、 φ 值, 应用 Rankine 理论我们可以求解土压力; 应用地基承载力公式我们可以求解地基承载力的大小; 应用条分法我们可以求解边坡的安全系数; 应用有限单元法或其他数值方法我们可以求解岩土结构物稳定性。文献 [19] 指出: 如何根据非线性破坏准则研究岩土结构物承载力或

稳定性是目前岩土工程界尚未解决的科学难题。

7.3.2 岩土极限分析非线性理论

在上限分析时,只要选择的机动允许的速度场满足速度边界条件和速度相容条件,就可以求出问题的上限解。上限值的大小与速度场选择有很大关系,只要速度场合理,就有可能求出问题的精确解(或称真实解)。同时指出,①几种不同的速度场对应的上限解可能相同或几乎相同(如:竖直边坡的临界高度问题),因此在选择速度场时,尽量使速度场简单,上限解较小;②速度场的选择与土体的抗剪强度指标、土体破坏准则之间没有必然的联系。

在结构的上限分析时,提高材料的屈服强度不会降低结构的极限载荷,其实,众多的学者在上限分析时,已经采纳过这种思想。在参考文献[27, 29, 30]中,线性 Mohr-Coulomb 破坏准则在以 $X = \sigma_x - \sigma_y$ 为横轴,以 $Y = 2\tau_{xy}$ 为纵轴的坐标系中,可表示成一个以原点为圆心、以 $R = 2c[\cos\varphi - (\sigma_x + \sigma_y)\sin\varphi]$ 为半径的圆域,为了便于问题的上限分析,他们就采用外切正多边形手段,这种手段实际上就是提高了材料的屈服强度。因此若采用一屈服强度超过材料的真实屈服强度,则在该屈服强度下,任一机动允许速度场对应的上限解均为极限载荷(对应真实的屈服强度)的上限。

基于上述指导思想,对非线性破坏准则下的上限分析也可采用“外切直线法”,以提高岩土材料强度为手段来研究结构物的上限解。设岩土材料非线性破坏准则为

$$\tau = c_0(1 + \sigma_n/\sigma_1)^{1/m} \quad (7-34)$$

将表达式(7-34)绘制成曲线,如图7-4所示。在图7-4中, c_0 表示曲线与纵轴的截距, c_0 、 σ_1 、 m 是岩土材料参数,由三轴试验确定。当 $m=1$ 时,式(7-34)变成线性 Mohr-Coulomb 破坏准则。考察图7-4中由直线 L 确定的线性破坏准则, L 为经过非线性破坏准则上的某一点并与其外切的直线方程,若曲线的曲率随 σ_n 的增加而逐步减少,则切线完全位于曲线的外侧,位于直线破坏准则上的所有点,其对应的材料强度相对提高,因此在直线破坏准则下(这里指外切线)的上限解一定为真实极限载荷(这里指非线性破坏准则对应的极限载荷)的上限。

表达式(7-34)的切线方程为

$$\tau = c_1 + \tan\varphi_1\sigma_n \quad (7-35)$$

在式(7-35)中, c_1 、 $\tan\varphi_1$ 分别表示切线的截距和斜率,如图7-4所示。 c_1 的表达式为

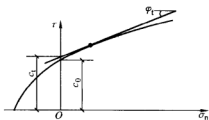


图 7-4 非线性破坏准则的切线

$$c_1 = \frac{m-1}{m} c_0 \left(\frac{m\sigma_1 \tan \varphi_1}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} + \sigma_1 \tan \varphi_1 \quad (7-36)$$

根据上述分析, 岩土极限分析非线性理论可描述为: 以切线方程(线性破坏准则)代替非线性破坏准则, 计算外力的功与内能耗散, 在整个的单刚块或多刚块破坏机理中强度参数 φ_1 、 c_1 的值保持不变, 作用在各刚块的正常应力、剪应力相同, 但大小未知。当岩土结构物破坏时, 能量平衡体系耗散最小, 以此确定切线方程的切点位置和岩土结构物的承载力或稳定性。

7.3.3 边坡稳定性上限解

Chen (1975) 等学者根据极限分析中的上限定理, 运用线性破坏准则研究边坡的稳定性。边坡在线性破坏准则下, 其稳定性系数 N_1 定义为 $N_1 = H_c \gamma / c$; Zhang & Chen (1987) 在变分法基础上研究边坡在非线形破坏准则下的稳定性, 边坡在非线形破坏准则下的稳定性系数定义为 $N_s = H_c \gamma / c_1$ 。

用非线性破坏准则研究图 7-5 所示的竖直边坡的稳定性问题。在自重作用下, 无支撑的竖直边坡将要发生破坏的最小高度, 称为它的临界高度。在这里, 竖直边坡所受的惟一外载荷是它的自重。假定边坡材料的重度为 γ , 现在要研究的问题是: 给定边坡的材料性质, 即给定材料的参数 c_0 、 m 、 σ_1 以及重度 γ 值, 求出竖直边坡的临界高度值。

为了将极限分析非线性理论应用于本问题。我们首先认为, 已给定了竖直边坡的高度 H 以及土体材料参数 c_0 、 m 、 σ_1 的值, 然后想象材料的体积力从零开始慢慢增加, 当体积力达到一定值时, 给定边坡就破坏。所以, 用塑性极限分析方法研究边坡稳定性问题, 实质上是求体积力的最小值。求出这个体积力问题后, 再按照边坡稳定性系数的定义变换为临界高度问题, 见式 (7-43)。

在使用上限定理求解图 7-5 所示的竖直边坡极限体力时, 首先要假定一个机动允许的位移速度场, 然后利用虚功率原理求出外

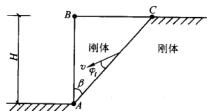


图 7-5 竖直边坡平动机制

载在这个速度场中所做的功率, 以及物体在这个速度场中所耗散的内能, 当它们之间相等时可求得这个速度场的外荷载, 即体积力。也就是说, 土体此时已经发生破坏或即将发生破坏。下面将采用岩土极限分析非线性理论与非线性 SQP 优化相结合的计算方法研究图 7-5 所示的竖直边坡在平面应变情况下稳定性问题。

1. 竖直边坡

在图 7-5 中, 土体的非线性强度准则由式 (7-34) 确定, 土体的重度为 γ , 竖直边坡的临界高度为在无支护的条件下, 由于重力作用引起边坡倒塌的最小高

度。假定边坡三角形 ABC 滑动体沿 AC 线发生刚性滑动, AC 线与竖直线 AB 成 β 角, β 角为待定量, 此时 AC 线为速度间断线, 速度 v 与速度间断线的夹角为 φ_1 , φ_1 也为待定量。在滑动面 AC 的左侧和右侧为刚体, 无变形能消散; 外力的功率为重力功率, 内能仅在滑动面 AC (对于二维问题, AC 为速度间断线; 对于三维问题, AC 为速度间断面) 消散。根据虚功率原理, 重力的虚功率为三角形 ABC 的重量 $\gamma H^2(\tan\beta)/2$ 与竖直速度分量 $v\cos(\varphi_1 + \beta)$ 的乘积, 即

$$\dot{W}_{\text{外}} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan\beta v \cos(\varphi_1 + \beta) \quad (7-37)$$

沿着速度间断线 AC 产生的内能消散等于: 沿速度间断线的切向速度大小 $v\cos\varphi_1$ 乘以岩土材料的粘聚力 c_1 , 再乘以速度间断线 AC 的长度 $H/\cos\beta$, 即

$$\dot{W}_{\text{内}} = c_1 \frac{H}{\cos\beta} v \cos\varphi_1 \quad (7-38)$$

当外力的功率等于内能消散时, 即由 $\dot{W}_{\text{外}} = \dot{W}_{\text{内}}$ 得

$$H = \frac{2c_1}{\gamma} \frac{\cos\varphi_1}{\sin\beta \cos(\varphi_1 + \beta)} \quad (7-39)$$

对式(7-39)求导, 由 $dH/d\beta = 0$ 得 $\beta_{\text{cr}} = \pi/4 - \varphi_1/2$, 然后将它代入式(7-39)后整理得

$$\frac{Hy}{4} = c_1 \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (7-40)$$

将式(7-36)代入式(7-40)后, 得

$$\frac{Hy}{4} = \left[\frac{m-1}{m} c_0 \left(\frac{m\sigma_1 \tan\varphi_1}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} + \sigma_1 \tan\varphi_1 \right] \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (7-41)$$

对式(7-41)整理后得

$$\frac{Hy}{4} = \left[\frac{m-1}{m} c_0 \left(\frac{m\sigma_1 \tan\varphi_1}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} + \sigma_1 \tan\varphi_1 \right] (\tan\varphi_1 + \sqrt{1 + \tan^2\varphi_1}) \quad (7-42)$$

从理论上讲, 对式(7-42)求导, 由 $dH/d(\tan\varphi_1) = 0$ 和 $\tan\varphi_1 > 0$ 这一条件可求得 H 的最小值, 即边坡的临界高度 H_{cr} 。但完成这一过程非常困难, 因为问题式(7-42)有时无极值点, 即使有极值点, 在极值点处还需要满足 $\tan\varphi_1 > 0$ 的条件。为了避免这一困难, 这里采用非线性 SQP 优化方法对式(7-42)求最小值。在非线性破坏准则下, 边坡的稳定性系数定义为

$$N_s = \frac{H_{\text{cr}} \gamma}{c_1} \quad (7-43)$$

算例: 设某竖直边坡的土体服从非线性破坏准则, 岩土材料参数 $c_0 = 90\text{kPa}$, $\sigma_1 = 247.3\text{kPa}$, m 分别为 1.0、1.2、1.4、1.6、1.8、2.0、2.5, 求该竖直边坡的临界高度, 该算例与参考文献[37]的算例相同。表 7-1 为本文非线性 SQP 优化方法计算

结果与参考文献[37]的“逆算法”比较情况,从表 7-1 看出:本文的计算结果与参考文献[37]的结果相差很小,最大误差没有超过 4%。将表 7-1 的结果绘制如图 7-6 所示。

表 7-1 竖直边坡稳定性系数 N_s ($c_0 = 90\text{kPa}$, $\sigma_1 = 247.3\text{kPa}$)

	$m = 1.0$	$m = 1.2$	$m = 1.4$	$m = 1.6$	$m = 1.8$	$m = 2.0$	$m = 2.5$
文献[37]的计算结果	5.510	5.130	4.890	4.730	4.600	4.520	4.350
本文切线法计算结果	5.510	5.312	5.059	4.885	4.759	4.665	4.505

图 7-6 竖直边坡稳定性系数 N_s 与参数 m 的关系 ($c_0 = 90\text{kPa}$, $\sigma_1 = 247.3\text{kPa}$)
从图 7-6 可看出:随 m 的增大,竖直边坡稳定性系数在逐步减少,曲线的曲率也随之降低; m 较小时, m 的变化对稳定性系数影响大, m 较大时, m 的变化对稳定性系数影响小。

2. 不能承受拉力的竖直边坡

式 (7-42) 是竖直边坡临界高度的目标函数,此时边坡能承受一定的拉力,边坡中不存在拉裂缝。当边坡土体不能承受拉力时,由于在自重作用下的边坡有向下滑动的趋势,因此在坡顶的一定区域内,会出现拉应力状态,如果土体的抗拉强度很弱,在坡顶区会出现拉裂缝。下面构造有拉裂缝存在情况下的速度场,如图 7-7 所示。假定竖直拉裂缝的深度为 nH ($0 \leq n \leq 1$),滑面与竖直线的夹角为 β , β 为待定量。滑动体的速度矢量与滑动面 AB 的夹角为 φ_1 , φ_1 也为待定量。在滑动面 AB 两侧的土体均为刚体。

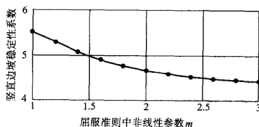


图 7-6 屈服准则中非线性参数 m

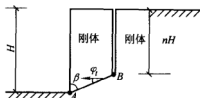


图 7-7 不能抗拉的竖直边坡

现在利用上限定理求竖直边坡在非线形破坏准则下的上限解。边坡处于平面应变状态,计算时取单位厚度。在滑动面 AB 的左侧和右侧为刚体,无变形能消散;外力的功率为重力功率,内能仅在滑动面 AB 消散。根据虚功率原理,重力的虚功率为:竖直速度分量 $v \cos(\varphi_1 + \beta)$ 与重量 $\gamma H^2 \tan \beta (1 - n^2)/2$ 的乘积,即

$$\dot{W}_{\text{外}} = 0.5 \gamma H^2 \tan \beta \cdot (1 - n^2) v \cos(\varphi_1 + \beta)$$

沿着速度间断线 AB 产生的内能消散等于:沿速度间断线的切向速度大小 $v \cos \varphi_1$

乘以岩土材料的粘聚力 c_1 ，再乘以速度间断线 AC 的长度 $H(1-n)/\cos\beta$ ，即

$$\dot{W}_{\text{内}} = c_1 \frac{H}{\cos\beta} (1-n) v \cos\varphi_1$$

当外力的功率等于内能消散时，即由 $\dot{W}_{\text{外}} = \dot{W}_{\text{内}}$ 得

$$H = \frac{2c_1}{\gamma(1+n)} \cdot \frac{\cos\varphi_1}{\sin\beta \cos(\varphi_1 + \beta)} \quad (7-44)$$

对式(7-44)求导，由 $dH/d\beta = 0$ 得 $\beta_{\text{cr}} = \pi/4 - \varphi_1/2$ ，然后将它代入式(7-44)后整理得

$$\frac{H\gamma(1+n)}{4} = c_1 \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (7-45)$$

从式(7-45)可看出：当 $n=0$ 时，边坡能承受拉力，此时的临界高度与式(7-40)相同；当 $n=1$ 时，边坡不能承受拉力，此时的临界高度为 $H = 2c_1 \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) / \gamma$ 的最小值，即临界高度为式(7-40)对应临界高度的一半。

3. 一般边坡问题

前面讨论了竖直边坡 ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$) 在平动机制时的稳定性问题，这里采用转动机制，研究坡角 $\alpha \neq 0^\circ$, $\beta \neq 0^\circ$ 情况下的边坡稳定性问题，如图 7-8 所示。在图 7-8 中，滑动面仍采用传统的对数螺旋面（线），边坡的坡角 β 较大，对数螺旋线通过坡脚 C 点。在转动破坏机制中，旋转体 ABC 作为刚体绕 O 点转动（ O 点位置事先假定）， BC 曲面（线）代表一薄的速度间断层，它是一条对数螺旋线，在 BC 线下的岩土是静止不动的，为刚性体。 θ_0 表示线 OB 与水平线的夹角， θ_h 表示线 OC 与水平线的夹角， H 是边坡的高度， L 是直线 AB 的长度， OB 的长度为 R_0 。由对数螺旋方程知： $R(\theta) = R_0 \exp[(\theta - \theta_0) \tan\varphi_1]$

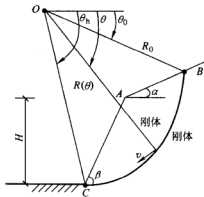


图 7-8 边坡转动机制

在图 7-8 中，由几何关系可得

$$\frac{H}{R_0} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} [\sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi_1] - \sin(\theta_0 + \alpha)] \quad (7-46a)$$

$$\frac{L}{R_0} = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} \cdot \{\exp[(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi_1] \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)\} \quad (7-46b)$$

从式 (7-46a)、式 (7-46b) 可以看出，当 θ_0 、 θ_h 及边坡的高度 H 给定后， R_0 及 L 值就被确定，因而转心 O 的位置就被确定。因此，用三个参数 θ_0 、 θ_h

及 H 就完全确定了上述一般边坡滑动面所在位置。

对任何机动允许的速度场, 如果土体重力的功率大于速度间断线上内能消散, 边坡就会倒塌; 当它们之间的功率恰好相等时, 此时边坡对应的高度为边坡的临界高度。在滑动面的左侧和右侧的土体为刚体, 无内能消散, 内能仅在速度间断线 BC 上消散; 外力的功率为旋转体 ABC 重力的功率。旋转体 ABC 上重力所做的功率为

$$\dot{W}_{\text{外}} = \gamma R_0^3 \dot{\theta} (f_1 - f_2 - f_3) \quad (7-47)$$

在式(7-47)中, $\dot{\theta}$ 为转动时的角速度, 函数 f_1 、 f_2 、 f_3 定义为

$$f_1(\theta_h, \theta_0, \tan \varphi_1) = \frac{1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi_1)} \{ (3 \tan \varphi_1 \cos \theta_h + \sin \theta_h) \times \\ \exp[3(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi_1] - (3 \tan \varphi_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_0) \} \quad (7-48a)$$

$$f_2(\theta_h, \theta_0, \tan \varphi_1) = \frac{1}{6} \frac{L}{R_0} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{R_0} \cos \alpha \right) \sin(\theta_0 + \alpha) \quad (7-48b)$$

$$f_3(\theta_h, \theta_0, \tan \varphi_1) = \frac{\exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi_1]}{6} \cdot \left\{ \sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{R_0} \sin(\theta_h + \alpha) \right\} \times \\ \left\{ \cos \theta_0 - \frac{L}{R_0} \cos \alpha + \cos \theta_h \cdot \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi_1] \right\} \quad (7-48c)$$

在式(7-48a)、式(7-48b)、式(7-48c)中, L/R_0 是由式(7-46a)确定。速度间断线 BC 内能消散为

$$\dot{W}_{\text{内}} = \int_{\theta_0}^{\theta_h} c_1 v \cos \varphi_1 \frac{R d\theta}{\cos \varphi_1} \quad (7-49)$$

当重力的功率等于内能消散时, 由 $\dot{W}_{\text{外}} = \dot{W}_{\text{内}}$, 并根据式(7-46a)得

$$H = \frac{c_1}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0, \tan \varphi_1) \\ = \frac{c_1 R_0^2 \dot{\theta}}{2 \tan \varphi_1} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi_1] - 1 \} \quad (7-50)$$

在式(7-50)中, $f(\theta_h, \theta_0, \tan \varphi_1)$ 、 c_1 的表达式为

$$f(\theta_h, \theta_0, \tan \varphi_1) = \frac{\sin \beta \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi_1] - 1 \}}{2 \sin(\beta - \alpha) \tan \varphi_1 (f_1 - f_2 - f_3)} \times \\ \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi_1] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \\ c_1 = \frac{m-1}{m} c_0 \left(\frac{m \sigma_1 \tan \varphi_1}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} + \sigma_1 \tan \varphi_1$$

因为 c_1 是以 $\tan \varphi_1$ 为变量是函数, 即 $c_1 = c_1(\tan \varphi_1)$, f 是以 θ_0 、 θ_h 、 $\tan \varphi_1$ 为变

量的函数, 即 $f(\theta_h, \theta_0, \tan\varphi_t)$, 所以 H 函数也是以 θ_0 、 θ_h 、 $\tan\varphi_t$ 为变量的函数, 即

$$H = H(\theta_h, \theta_0, \tan\varphi_t) \quad (7-51)$$

由上限定理知, 临界高度为式(7-51)的最小值。当式(7-51)取最小值时, 应满足下列条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta_h} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial \theta_0} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial (\tan\varphi_t)} = 0 \\ \theta_h > \theta_0 \quad \tan\varphi_t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-52)$$

从理论上讲, 通过解上述方程(7-52), 可获得 θ_0 、 θ_h 、 $\tan\varphi_t$ 的极值, 在所有的极值点中选择能使式(7-51)取最小值的极值点, 然后将此极值代入式(7-51), 可获得边坡的临界高度 H_{cr} , 将 $\tan\varphi_t$ 的值代入 $c_t = c_t(\tan\varphi_t)$ 可获得 c_t 的值, 此时边坡稳定性系数仍按式(7-43)计算。实际上, 式(7-52)是一个带约束条件的三元偏微分方程组, 通过手工计算一般很难得到结果; 另一方面, 式(7-52)有时无极值点。为此, 将式(7-51)转化为

$$\left. \begin{aligned} \text{求最小值: } H(\theta_h, \theta_0, \tan\varphi_t) \\ \text{约束条件: } \theta_h > \theta_0 \text{ 和 } \tan\varphi_t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-53)$$

式(7-53)实质是一个具有约束条件的非线性优化问题, 这里采用非线性 SQP 优化方法求式(7-53)的最小值。

文献[37]的计算结果是在上限定理的基础上采用“逆算法”得到的; 这里的计算结果也是建立在上限定理的基础上, 但采用了“岩土极限分析非线性理论”和非线性 SQP 优化方法, 计算结果比“逆算法”小。对上限解来讲, 结果越小越好。

7.3.4 下限解

对于边坡稳定性问题, 式(7-53)给出了非线性破坏准则下稳定性的上限目标函数, 并根据非线性 SQP 优化计算出上限解。这里研究不能抗拉竖直边坡临界高度的下限解。构造静力场如图 7-9 所示, 把边坡分成三个区域: ①区、②区、③区。假定在区域①、②、③中的应力状态分别是单轴压缩、双轴压缩和静水压缩。在①、②区域之间应力场是连续变化的; 在②、③区域之间存在竖直应力间断面。显然, 在间断面上满足平衡条件。另外, 所构造的应力场满足平

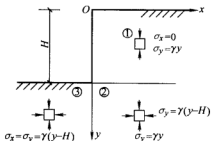


图 7-9 竖直边坡静力场

衡微分方程以及应力边界条件。因此,所构造的应力场为平衡应力场。

在图 7-10 中,画出了各区域相应的莫尔应力圆。对于①区域的最大应力莫尔圆 $\sigma_1 = \gamma H$, $\sigma_3 = 0$, 即①区域坡底处 ($y = H$) 的应力圆,切于非线性破坏准则时,各区域的应力状态都未违反破坏准则。从而,这个平衡的应力场成为静力许可的应力场。为了便于问题的比较分析,在这里仍然采用参考文献 [37] 的非线性破坏准则,其表达式见式 (7-34)。此时,非线性破坏准则对应的材料参数 $c_0 = 90\text{kPa}$, $\sigma_1 = 247.3\text{kPa}$, m 分别为 1.2、1.4、1.6、1.8、2.0 和 2.5。由非线性破坏准则可得

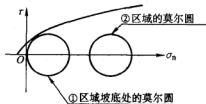


图 7-10 静力场中的莫尔圆

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\gamma H \cos \varphi_1}{2c_0} \right)^m &= 1 + \frac{\gamma H}{2\sigma_1} (1 - \sin \varphi_1) \\ \tan \varphi_1 &= \frac{c_0}{m\sigma_1} \left(\frac{\gamma H \cos \varphi_1}{2c_0} \right)^{1-m} \end{aligned} \right\} \quad (7-54)$$

在式 (7-54) 中各符号的意义同前。在这里, γH 、 φ_1 是未知数, 其他均为已知数, 通过解上述方程可得竖直边坡的临界高度 H_{cr} 。此时, 非线性破坏准则下的边坡稳定性系数 N_s 仍按照式 (7-43) 确定。表 7-2 为不能抗拉竖直边坡稳定性系数 N_s 与非线性参数 m 的关系。

表 7-2 不能抗拉边坡稳定性系数下限解 N_s 与非线性参数 m 之间的关系

m	$m = 1.2$	$m = 1.4$	$m = 1.6$	$m = 1.8$	$m = 2.0$	$m = 2.5$
下限解	2.6763	2.5577	2.4739	2.4118	2.3639	2.2818
上限解	2.6763	2.5577	2.4739	2.4118	2.3639	2.2818

注: $c_0 = 90\text{kPa}$, $\sigma_1 = 247.3\text{kPa}$ 。

从图 7-10 知, 莫尔应力圆位于平面的右侧, 即所有的应力都大于或等于零 (以压应力为正), 这说明上述所构造的平衡应力场不存在拉应力, 并且每个应力圆不违反非线性破坏准则, 从而表 7-2 中的稳定性系数是不能抗拉时竖直边坡稳定性系数的下限解。

从表 7-2 可看出: 随着非线性参数 m 的增加, 稳定性系数下限解 N_s 在逐步减小; 在参数 $c_0 = 90\text{kPa}$ 、 $\sigma_1 = 247.3\text{kPa}$ 不变的情况下, 这里的下限解与上限解完全相等, 这说明这里的下限解是正确的、有效的。

在上限分析中, 构造机动速度场, 根据外力的功率与内能耗散相等原理求得问题的上限解, 此时并不考虑静力平衡方面的要求; 下限分析时, 静力场要求满足静力平衡条件, 而不考虑结构的变形, 使得问题简化。一般应用下限解法比应

用上限解法要困难一些。

7.4 岩土极限分析法中存在的问题

对岩土结构物进行极限分析数值模拟时,目前还存在一些问题。

7.4.1 非关联材料的极限分析

非关联材料主要分成两类,一类是材料的塑性势面与该材料的屈服面类似且共轴线,另一类是材料的塑性势面与该材料的屈服面不同且不共轴线。目前,对前一类非关联材料的极限分析问题,只有少量文献涉及;而对后一类非关联材料的极限分析问题,几乎还没研究。下面主要讨论关于前一类非关联材料的极限分析。

速度间断线可看作速度场中从一个速度区过渡到另一个速度不同的区域的薄层的极限情况。如图 7-11 所示。在过渡层中心线上的某点 P ,作中心线的切向和法向,分别表示成 x 方向和 y 方向,图中 Δv 表示薄层两侧速度的变化方向, ψ 是非关联材料的剪胀角。速度的法向分量间断量与切向分量间断量的比值为

$$\Delta v_y / \Delta v_x = \mp \tan \psi \quad (7-55)$$

其中“-”号相应于 α 间断线,“+”号相应于 β 间断线。式 (7-55) 表明,对于非关联岩土材料,速度的变化矢量倾斜间断线 ψ 角。在极限分析的上、下定理的证明过程中,主要依据是虚功率原理,并在相关联流动法则的基础上得出。它的几何意义是,塑性应变率向量与屈服面垂直。如果没有这个垂直条件,那么就不能得出极限分析中的上、下定理。实际上,对于非关联岩土材料来讲,由于土体具有剪胀性,剪切过程中土体体积发生变化等因素影响使得传统的上、下定理无法被证明。下面考虑土体的一个简单物理模型,如图 7-12 所示。

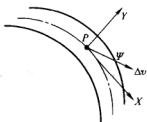


图 7-11 速度间断线

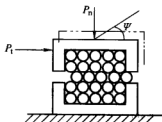


图 7-12 简单物理模型

在图 7-12 中,土颗粒被理想化为一个个刚性球体,它们处于密实而均匀的排列中,土体上作用两个力,一个是法向压力 P_n ,假定它是常数;另一个是水平方向的力 P_1 ,其数值从零逐渐增加,直到土体发生剪切滑动。土体发生滑动时,水平力 P_1 不仅要克服粘聚力,而且还要克服两种类型的摩擦力,即存在于

土颗粒之间相互接触部分的表面摩擦力以及土颗粒相互之间位置发生变化时所需克服的啮合摩擦力。这个啮合的运动产生了向上的位移（图中双点画线部分），因此，位移向量必须与滑动面成 ψ 角。在剪切面两侧，土体的相对速度发生变化，因此可把滑动面附近的土体假定为速度间断过渡层，则此时位移的方向与两侧速度的变化方向一致。

部分学者通过试验发现砂土在剪切时发生剪胀或剪缩现象，而不服从关联材料流动法则。基于这一事实，近年来部分学者在平动机理的基础上，应用功能原理推导出非关联材料的上限定理，即在传统的上限定理中用 C^* 、 φ^* 代替抗剪强度指标 C 、 φ ，即

$$\tan \varphi^* = \tan \varphi \frac{\cos \psi \cos \varphi}{1 - \sin \psi \sin \varphi} \quad C^* = C \frac{\cos \psi \cos \varphi}{1 - \sin \psi \sin \varphi} \quad (7-56)$$

从而极限分析也能在非关联岩土材料中应用，其中 ψ 为砂土的剪切膨胀角。但是，众多的学者通过有限元计算得出：对岩土承载力问题，非关联假设与关联假设对承载力的影响是很小的，可以忽略。这一结论与参考文献 [38] 不一致。这一问题有待于人们进一步探讨。

同时，这里介绍若干定理，这些定理对进一步研究非关联岩土材料的极限分析有很大的帮助。

定理一：使具有无相对运动条件的摩擦内面的弹性—塑性体的集合系统产生破坏的任何一组荷载，将使具有有限摩擦的情况下产生破坏。

定理二：任何一组使服从相关联流动法则的材料产生破坏的荷载，将使服从非关联流动法则的同样材料产生破坏。

这里“同样材料”指的是材料有相同的破坏准则，且屈服面与塑性势面共轭线。这个定理容易从下述事实得出：因为静力允许的应力场是与流动法则无关的，所以，与非关联流动法则的材料破坏荷载相对应的应力场，也一定是服从相关联流动法则的同样材料的静力允许应力场。因此，服从非关联流动法则的材料实际破坏荷载，一定小于或等于服从相关联流动法则的同样材料的实际破坏荷载。

7.4.2 非线性破坏准则下，如何进行下限有限元分析

本文根据极限分析非线性理论研究研究了非线性破坏准则下的上限目标函数极约束方程，并运用非线性 SQP 最优化方法进行求解。对一些简单的岩土问题，本文研究了相应问题的下限解。但是，对于复杂的岩土承载力或稳定性问题，在下限分析时，存在的困难是：如何通过“屈服面分段割线化”，对静力允许的应力场进行 SQP 优化，能得到目标函数的最优解。这一过程的实施还有待于人们进一步研究。

7.4.3 上限有限元分析时, 单元间是否需要设置速度间断线

应用有限元和极限原理相结合的刚塑性有限元法为求解岩土极限荷载以及边坡稳定性问题提供了新的方法。它克服了人工建立静力允许应力场和机动允许速度场的困难, 最优的上、下限解分别通过优化方法得到。这种上限定理有限元与一般以结点位移为未知量的常规有限元的主要区别在于: 上限定理有限元以结点速度为未知量。Jiang 等学者采用如图 7-1 所示的结点速度, 即同一位置上结点速度相同; Sloan 等学者采用如图 7-2 所示的结点速度, 即同一位置上由于间断线存在结点速度不连续。例如图 7-2 中的①结点速度 (u_1, v_1) 与②结点速度 (u_2, v_2) 不相等, ③④结点也是如此。近年来, 这两种情况都已经成功用于实践, 但哪一种方法更有效, 至今还没有一个统一的答案, 还有待于人们进一步研究。

7.4.4 岩土材料安定性

极限分析和安定分析是塑性力学中最有实用意义的分支之一, 其宗旨是确定各类工程的极限荷载和安定荷载, 为过程设计提供可靠的理论依据。

在比例加载情况下, 极限荷载是反映工程结构承载力的重要指标。在材料小变形假设以及弹塑性假设的条件下, 当荷载增加到某一荷载值时结构将出现无限制的塑性流动, 即极限状态, 此时结构丧失进一步承受荷载的能力, 此时的外荷载为极限荷载。极限荷载的概念很早就被提出, 1952 年 Drucker 等人和 Hill 提出了极限分析的上、下限定理, 做出了奠基性的研究。

在反复加载的情况下, 安定荷载是控制工程结构塑性损伤积累的直接依据。当反复荷载的幅值小于安定荷载时, 结构虽然在加载初期可能出现局部塑性变形, 但经过一定荷载循环后塑性损伤不再积累, 结构将呈现弹性行为。当荷载的幅值超过安定荷载后每个循环都将产生塑性变形, 结构进入塑性损伤不断积累的缓慢破坏过程, 最终导致循环塑性(低周疲劳)破坏, 或者渐增塑性(棘轮)破坏。安定分析的下限定理早在 1938 年就由 Melan 提出, 而上限定理直到 1956 年才由 Koiter 给出证明。

1. 安定分析的下限定理

如果存在与时间无关的自平衡残余应力场, 把它与某复杂加载过程中的任一荷载组合所引起的弹性应力场叠加后处处不破坏材料的屈服条件, 则该复杂荷载是安定荷载的下限, 安定荷载是这些下限解中的最大者。这就是安定分析的下限定理。它与极限分析的下限定理有些不同, 但实质上都归纳为寻找某个与外荷载相平衡的静力允许应力场, 并在不违反材料破坏准则的前提下寻求外荷载可能达到的最大值, 它们都是典型的数学规划问题。其主要区别在于加载方式不同, 但

比例加载是复杂加载的一种特殊情况。

应用 Melan 静力型的安定分析时,关键在于寻找最佳的自平衡残余应力场,对此已发展了应力函数法、温度参数法、有限差分法等各种解析与数值方法。根据安定分析的下限定理,安定分析可转化为寻求某一虚拟的残余应力场下对应的最大荷载乘子问题,即转化为以安定荷载乘子为目标函数、以虚拟的自平衡残余应力场参数为优化变量、以破坏准则为约束条件的最优化问题。有限元与数学规划技术相结合的方法是目前国内外常用的数值分析方法。用这种方法,当单元比较多或者是荷载空间顶点比较多时,规划问题的约束条件以及优化变量的数目将会变得很大;另外由于函数的非线性而形成非线性规划问题。为此,许多学者采用对屈服面分段线性化处理,又把问题转化为更大规模的线性规划问题,出现了所谓的维数障碍现象,计算量呈指数增加,使问题实际上不可求解。这是数学规划法给安定分析带来的弊端,正是由于这个维数障碍,使得安定分析无法应用到规模比较大的实际问题中,成为工程应用的主要障碍。

2. 安定分析的上限定理 (Koiter)

如果存在机动允许的塑性应变率循环能使某复杂加载过程中荷载在其上所作的外力功大于结构内部的塑性耗散功,则结构不安定,该复杂荷载必大于安定荷载,称为上限解,安定荷载是这些荷载中的最小者。这就是安定分析的上限定理。它与极限分析的上限定理的主要区别在于:极限分析中计算的是外力的功率和内能耗散功率,而安定分析则要计算这些功率在一个循环周期内的积分值(功的增量)。对于没有循环变化的比例加载情况,消去公因子(积分持续时间)后,安定分析的上限定理就转化为极限分析的上限定理。

应用 Koiter 机动型的安定分析时,需要建立机动允许的塑性应变率循环,并用虚功率相同的积分形式求解安定荷载的上限,在复杂的荷载条件下对时间的积分只有满足一定条件才能求出,所以安定分析的上限定理应用也受到很大的限制。

参 考 文 献

- 1 Yang Xiao-Li and Yin Jian-Hua (2004). Slope stability analysis with nonlinear failure criterion. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE. Vol. 130 (3): 267 ~ 273
- 2 Yang Xiao-Li, Li Liang and Yin Jian-Hua (2004). Stability analysis of rock slopes with a modified Hoek-Brown failure criterion. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol. 28 (2): 181 ~ 190
- 3 Yang Xiao-Li, Yin Jian-Hua and Li Liang (2003). Influence of a nonlinear failure criterion on the bearing capacity of a strip footing resting on rock mass using a lower bound approach. *Canadian Geotechnical Journal*. Vol. 40 (3): 702 ~ 707
- 4 Yang Xiao-Li, Li Liang and Yin Jian-Hua (2004). Seismic and static stability analysis for rock slopes

by a kinematical approach. *Geotechnique*. Vol. 54 (8): 543 ~ 549

- 5 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对被动土压力的影响. *工程力学*, 2004 (1): 31 ~ 36
- 6 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对竖直边坡稳定性的影响. *岩石力学与工程学报*, 2004 (4): 592 ~ 596
- 7 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 岩土工程极限分析数值模拟的研究进展. *有色金属*, 2002 (3): 107 ~ 112
- 8 W. F. Chen (1975), *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevir Science, Amsterdam
- 9 W. F. Chen and X. L. Liu (1990), *Limit analysis in soil mechanics*. Elsevir Science, Amsterdam
- 10 龚晓南. 土塑性力学. 浙江: 浙江大学出版社, 1990
- 11 杨小礼, 李亮. 圆形基础极限分析下限解探讨. *铁道学报*. 2001 (6): 77 ~ 80
- 12 李亮, 杨小礼. 圆形浅基础地基承载力极限分析的上限解析解. *铁道学报*. 2001 (1): 94 ~ 97
- 13 Soubra, A. H. (1999). Upper - bound solution for bearing capacity of foundations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. ASCE, 125 (1): 59 ~ 68
- 14 Soubra, A. H. (1997). Seismic bearing capacity of shallow strip footing in seismic conditions. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Geotechnical Engineering*, 125 (4): 230 ~ 241
- 15 Soubra, A. H. (2000). Static and seismic passive earth pressure coefficients on rigid retaining structure. *Can. Geotech. J.* V (37) 463 ~ 478
- 16 Soubra, A. H. and P. Regensass (2000). Three-dimensional passive earth pressure by kinematical approach. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. ASCE, 126 (11): 969 ~ 978
- 17 J. Lysmer (1970). Limit analysis of plane problems in soil mechanics. *J. of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.96: 1311 ~ 1334
- 18 A. Bottero. and R. Negre (1980). Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems. *Comp. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, 22: 131 ~ 149
- 19 Jiang Gong-liang (1995). Non-linear finite element formulation of kinematic limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.38: 2775 ~ 2807
- 20 Jiang Gong-liang (1994). Regularized method in limit analysis. *J. Engrg. Mechanics*. ASCE, Vol.120: 1179 ~ 1197
- 21 Jiang Gong-liang and J. P. Mangan (1997). Stability analysis of embankments comparison of limit analysis with method of slices. *Geotechnique*. London, 47 (4): 857 ~ 872
- 22 姜功良. 浅埋软土隧道稳定性极限分析. *土木工程学报*, 1998, 64 ~ 72
- 23 J. R. Franco & R. S. Ponter (1997). A general approximate technique for the finite element shake-down and limit analysis of axisymmetrical shells. Part one: Theory and fundamental relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.40: 3495 ~ 3513
- 24 J. R. Franco & R. S. Ponter (1997). A general approximate technique for the finite element shake-down and limit analysis of axisymmetrical shells. Part two: Numerical application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.40: 3515 ~ 3536

- 25 A. Capsoni & L. Corradi (1997). A finite element formulation of the rigid-plastic limit analysis problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.40, 2063 ~ 2086
- 26 R. L. Michalowski, and L. Shi (1995). Bearing capacity of footing over two-layer foundation soils. *J. Geotech. Engrg.* ASCE, 121 (5): 421 ~ 428
- 27 S. W., Sloan and P. W. Kleeman (1995). Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Comp. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, 127: 293 ~ 314
- 28 S. W. Sloan (1988). A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.26: 2671 ~ 2685
- 29 S. W. Sloan (1989). Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol.13: 263 ~ 282
- 30 S. W. Sloan (1988). Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.12: 61 ~ 67
- 31 B. Ukritchon, J. Whittle and S. W. Sloan (1998). Undrained limit analysis for combined loading of strip footings on Clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. ASCE, 124 (1): 1 ~ 11
- 32 H. S. Yu, R. Salgado and S. W. Sloan (1998). Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. ASCE, 124 (3): 265 ~ 276
- 33 J. Kim, R. Salgado and H. S. Yu (1999). Limit analysis of slopes subjected to pore-water pressures. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. ASCE, 125 (1): 49 ~ 58
- 34 沈卫平. 极限分析的改进迭代方法. 计算力学及其应用. 1985 (2): 34 ~ 38
- 35 张丕辛. 极限分析的无搜索数学规划算法及其应用. [博士学位论文] 北京: 清华大学. 1989
- 36 R. Baker and S. Frydman (1983). Upper bound limit analysis of soil with nonlinear failure criterion. *Soil and Foundations*. Vol. 23 (4): 34 ~ 42.
- 37 X. J. Zhang and W. F. Chen (1987). Stability analysis of slopes with general nonlinear failure criterion. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. Vol.11: 33 ~ 50
- 38 A. Drescher, and E. Detournay (1993). Limit load in translational failure mechanics for associative and non-associative materials. *Geotechnique*. London, 43 (3): 443 ~ 456
- 39 Famiyesin, O. O. (1990). Modelling and computational aspects of the nonlinear finite element analysis of general concrete structures. University of Swansea, PhD thesis
- 40 Vermeer, P. A. & De Borst, R. (1984). Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron* 29: 1 ~ 64
- 41 De Borst, R. & Vermeer, P. A. (1984). Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis. *Geotechnique* 34, No.2: 199 ~ 210
- 42 杨小礼. 线性与非线性破坏准则下岩土极限分析方法及其应用. [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2002

第8章 地基应力和沉降实用计算

8.1 概述

修建在地基上的建筑物,其荷载作用必然引起地基内部的应力变化,使地基土产生变形进而导致沉降。地基沉降量的大小和差异,是评价建筑物结构和地基安全稳定的重要方面。目前,国内外建筑物的沉降计算方法,是根据室内侧限压缩试验模拟现场土层受荷作用压缩所得到的 $e-p$ 曲线的结果,推导出地基计算沉降的公式,并加以经验系数修正的计算方法。事实上,地基土受到建筑物荷载作用后的变形是复杂的,它涉及到土层应力状态——自重应力和外荷作用下的应力传递——附加应力;受到地基土压缩历史的影响和应力状态的改变;同时也受到土层自身的应力与变形机理即应力~应变关系的制约;上部结构、基础形式对地基的共同作用、地下水位上升与下降以及时间的效应等环境因素,这些都影响着地基沉降量的变化和准确计算沉降量的方法。随着土力学学科的发展,地基土的变形与建筑物沉降计算,必将更符合实际。

本章将重点论述土体的应力状态计算和在外荷载作用下引起应力改变的计算依据,讨论建筑物荷重引起的附加应力与变形机理的内在联系,介绍简单的土的应力—应变关系模型和计算沉降方法进行地基沉降的实用计算。由于沉降计算和对应于地基两方面的复杂性,提出的沉降计算公式多具有应用条件和相应的背景,因此计算方法较多,不能作详尽的列举。本章内容包括:土层的自重应力计算;附加应力计算的两类基本解;地基沉降计算的几种实用方法,也包括特殊土地基的沉降计算等。

8.2 地基土层的自重应力

8.2.1 土层的自重应力

地基中应力分为自重应力和附加应力。前者是由土的本身重力变化所引起的;后者是来源于地面或基础传递的作用荷载。地基内任一点的应力状态描述为三个正应力 σ_z 、 σ_x 、 σ_y (以压应力为正) 和三对剪应力 τ_{xy} 与 τ_{yx} 、 τ_{xz} 与 τ_{zx} 、 τ_{yz} 与 τ_{zy} 。

对于具有水平地面,常常可以视重力方向的静态地基土应力为 z 轴对称,垂直应力表示为 σ_z ; 并应有 $\sigma_x = \sigma_y$ 是水平应力,见图 8-1。地基下任一点的三个方

向的应力所满足的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

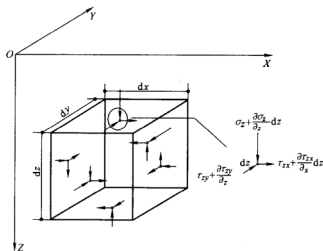


图 8-1 土体内一点单元的应力状态

这里 γ_0 为基土的重度。对具有水平地面的均质土，由剪应力互等定理或力矩平衡的条件可证明

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

对均质地基可假定 γ_0 为常量，在地面下 z 深度处的垂直应力 σ_z ，由式 (8-1) 的第三式变为

$$\sigma_z = \gamma_0 z - \int_0^z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz - \int_0^z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz$$

在地面水平边界，剪应力为零，正应力即为主应力

$$\sigma_z = \gamma_0 z = \sigma_1$$

在自重条件下, 并有 $\sigma_x = \sigma_y$ 。

8.2.2 侧应力系数 K_0

应用胡克定律, 有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

式中的 E 和 μ 分别为弹性模量及泊松比, ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 为主应变。

设地基土无侧向应变时, 即 $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$, 因 $\sigma_x = \sigma_y$, 可得

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_z$$

或者写成

$$\sigma_x = K_0 \sigma_z$$

式中的 K_0 为静止侧压力系数。当 $\sigma_x \leq \mu \leq 0.5$, 则 $0 \leq K_0 \leq 1$ 。可以看出, K_0 变化范围较 μ 为大。

1. 侧压力系数 K_0 的经验公式

对于侧压力系数, Jaky 给出了正常固结的砂性土静止侧压力系数经验式

$$K_0 = 1 - \sin \varphi$$

对于正常固结的粘性土, Brooker 认为

$$K_0 = 0.95 - \sin \varphi$$

对于超固结土, 超固结比 (OCR) 对 K_0 的影响很大。当 $OCR = 2.5 \sim 4.5$ 时, K_0 会大于 1, Wroth 给出的经验公式是

$$\lg OCR = (3.6 + 0.07 I_p) \left(\frac{1 - K_0^n}{1 + 2K_0^n} + \frac{K_0 - 1}{1 + 2K_0} \right) \quad (8-3)$$

式中, I_p 是塑性指数 (%), K_0 和 K_0^n 分别为该土在超固结和正常固结状态下的静止侧压力系数。对于砂土来说, 式 (8-3) 只适用于 $OCR < 20$ 的情况。

Caquot 给出更简单的经验关系式, $K_0 = 0.5 \sqrt{OCR}$, 后来, 使用改进式, 即

$$K_0 = K_0^0 (OCR)^b$$

式中 K_0^0 ——正常固结状态下的静止侧压力系数, $b = 0.39 \sim 0.58$ (相应于从粘土到砂土)。对于砂土, b 与相对密度有关。 K_0 也与土的扰动程度有关。当为原状土时, 它随塑性指数 I_p 的增加而增加; 当为重塑状态时, 它随 I_p 的增加而减少。以下统一用 K_0 表示静止侧压力系数。值得指出的是, K_0 为有效应力条件下的概念。

2. 土层各向异性及其结构性对 K_0 的影响

当为各向同性时, 垂直方面的弹性模量 E_v , 水平方向的弹性模量 E_h , 以及三个泊松比 (μ_1 为水平应力对于水平应变的影响; μ_2 为水平应力对于垂直应变的影响; μ_3 为垂直应力对于水平应变的影响。代入式 (8-2), 可得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_h} - \frac{\mu_1}{E_h} \sigma_y - \frac{\mu_3}{E_v} \sigma_z \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_h} - \frac{\mu_1}{E_h} \sigma_x - \frac{\mu_3}{E_v} \sigma_z \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_v} - \frac{\mu_1}{E_h} \sigma_x - \frac{\mu_2}{E_h} \sigma_y \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

应用 $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y$, 则

$$K_0 = \frac{E_h}{E_v} \cdot \frac{\mu_3}{1 - \mu_1}$$

静止侧压力系数 K_0 与土的 n 、 I_p 、 φ 以及各个方向的弹性模量 E 有关, 而这些参数反映了土体的物理性质, 也表现在它的结构性与应力历史 (OCR 的影响) 有较大的关系。

8.3 外荷载作用下的附加应力计算

建筑物荷载作用于基础, 通过基础作用在地基内部引起附加应力。附加应力的计算涉及到基础传给基底面的荷载分布问题, 也就是基础对上部结构和外荷载作用所传给基底面的荷载形式, 即基底附加应力的分布问题。它是十分复杂的, 受上部结构、荷载大小和形式、基础形式及地基土的组成等多方面的影响, 属共同作用研究的重大课题, 虽然有限元方法在共同作用方面的分析上作出了一定的贡献, 但对地基、基础的计算分析得到的成果还难以令人满意。考虑地基—基础共同作用问题时, 其核心问题就是基底压力分布的问题。目前, 工程设计计算基底压力分布是假定直线分布的形式, 在确定了基底压力分布之后, 计算地基内的附

加应力，迄今还是基于地基是半无限大弹性体的假设。在工程应用中，常常把竖向附加应力作为是产生地基沉降的原因和稳定计算的依据。

8.3.1 集中力作用地基表面时附加应力计算的两个基本解

计算地基内部的附加应力，依据集中力作用下在地基内部产生附加应力的基本解，然后再对分布面力进行积分，可求在外荷分布下所产生的附加应力。集中力作用下弹性空间体产生的附加应力基本上可分两类：一类是集中力作用于弹性体水平表面 Boussinesq 基本解和 Cerrut 基本解，一类是集中力作用于弹性体水平表面下一定距离 (Mindlin 基本解)，本节先给出前一类基本解。

1. 竖向集中力作用的 Boussinesq (1885 年) 解

地基表面在垂直力 P 作用下，附加应力的应力分量 (如图 8-2 所示) 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - (1 - 2\mu) \frac{R}{R + z} \right] \\ \sigma_\theta &= -(1 - 2\nu) \frac{P}{2\pi R^2} \left(\frac{Z}{R} - \frac{R}{R + Z} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{3P}{2\pi} \times \frac{rz^2}{R^5} \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi} \times \frac{Z^3}{R^5} \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[3\cos^3\phi \sin^2\phi - (1 - 2\mu) \frac{\cos^2\phi}{1 + \cos\phi} \right] \\ \sigma_\theta &= -(1 - 2\mu) \frac{P}{2\pi z^2} \left[\cos^3\phi - \frac{\cos^2\phi}{1 + \cos\phi} \right] \\ \tau_{rz} &= \frac{3P}{2\pi z^2} \cos^4\phi \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

上两式中都以压为正， μ 为泊松比。由于轴对称， $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ ，所以 σ_θ 是主应力。

2. 水平集中力作用的 Cerrut 解

Cerrut 在 1882 年，求得倾斜集中荷载作用于上半无限弹性体内的应力分量。

现将水平集中力 H (见图 8-2) 作用于水平边界面时的应力解答归纳如下

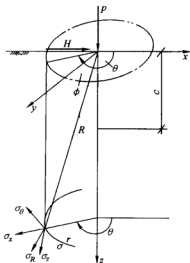


图 8-2 竖向力、水平力作用于半无限弹性体

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{H}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{(1-2\mu)R^2}{(R+z)^2} \left(1 - \frac{y^2(3R+z)}{R^2(R+z)} \right) \right] \\
 \sigma_y &= \frac{H}{2\pi R^3} \left[\frac{3y^2}{R^2} - \frac{(1-2\mu)R^2}{(R+z)^2} \left(3 - \frac{x^2(3R+z)}{R^2(R+z)} \right) \right] \\
 \sigma_z &= \frac{3Hxz^2}{2\pi R^5} \\
 \tau_{xy} &= \frac{H}{2\pi R^3} \left[\frac{3xy}{R^2} + \frac{(1-2\mu)R^2}{(R+z)^2} \left(1 - \frac{x^2(3R+z)}{R^2(R+z)} \right) \right] \\
 \tau_{yz} &= \frac{3Hxyz}{2\pi R^5} \\
 \tau_{zx} &= \frac{3Hx^2z}{2\pi R^5}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

由于假定土体是弹性体, 在求得地基表面的荷载分布后, 应用式 Boussinesq 和 Cerrut 两个基本解, 根据基本解答进行分布荷载积分并叠加, 可求得半无限弹性体上任何荷载作用下的内部应力。当然积分有时是困难的, 因此各土力学及地基工程书籍都制成图表, 以备查用。

8.3.2 集中力作用于距地基表面深处 c 的一点附加应力 Mindlin 解

1. 竖直集中力作用下的 Mindlin 基本解

参考图 8-2, 设竖向集中力为 P , 位于距地表以下距离深度 c 处, 其在地基内部任意点以空间坐标 (x, y, z) 或 (r, θ, z) 的附加应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{3\mu^2(z-c)}{R_1^5} - \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{(1-2\mu)(z+7c)}{R_2^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-4\mu)c^2(z-c) - 6c(z+c)[(1-2\mu)z - 2\mu c]}{R_2^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{30c^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)} \left[1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{z^2}{R_2^2} \right] \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{P(1-2\mu)}{8\pi(1-\mu)} \left[-\frac{z-c}{R_1^3} - \frac{(3-4\mu)(z+c) - 6c}{R_2^3} - \frac{6c(z+c)^2}{R_2^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{6c^2(z+c)}{(1-2\nu)R_2^3} + \frac{4(1-\mu)}{R_2(R_2+z+c)} \right] \\ \sigma_z &= \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} - \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_2^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-4\mu)z(z+c)^2 - 3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right] \\ \tau_{rz} &= \frac{Pr}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1-2\mu}{R_2^3} + \frac{3(3-4\mu)z(z+c) - 3c(3z+c)}{R_2^5} + \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

式中 $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}$; $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2}$

2. 水平集中力作用下 Mindlin 解

参考图 8-2, 设水平集中力 H 作用距地面 c 。深度处 x 方向, 其在地基内部任意点以空间坐标 (x, y, z) 或 (r, θ, z) 的附加应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Hx}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)}{R_1^3} + \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{R_2^3} + \frac{3(3-4\mu)x^2}{R_2^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left[3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] - \frac{6c}{R_2^3} \left[3c - (3-2\mu)(z+c) + \frac{5x^2z}{R_2^2} \right] \right\} \\ \sigma_y &= \frac{Hx}{8\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{(1-2\mu)}{R_1^3} + \frac{3y^2}{R_1^5} - \frac{(1-2\mu)(3-4\mu)}{R_2^3} + \frac{3(3-4\mu)y^2}{R_2^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left[1 - \frac{y^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] - \frac{6c}{R_2^3} \left[c - (1-2\mu)(z+c) + \frac{5yz^2}{R_2^2} \right] \right\} \\ \sigma_z &= \frac{Hx}{8\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{(1-2\mu)}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} + \frac{(1-2\mu)}{R_2^3} + \frac{3(3-4\mu)(z+c)^2}{R_2^5} - \right. \\ &\quad \left. \frac{6c}{R_2^3} \left[c + (1-2\mu)(z+c) + \frac{5z(z+c)^2}{R_2^2} \right] \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{Hy}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{1-2\mu}{R_2^3} + \frac{3(3-4\mu)x^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)^2} + \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] + \frac{6cz}{R_2^5} \left[1 - \frac{5x^2}{R_2^2} \right] \right\} \\ \tau_{yz} &= \frac{Hxy}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{3(z-c)}{R_1^5} + \frac{3(3-4\mu)(z+c)}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^3} \left[1-2\mu + \frac{5z(z+c)}{R_2^2} \right] \right\} \\ \tau_{xz} &= \frac{H}{8\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} - \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_2^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3(3-\mu)x^2(z+c)}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^3} \left[z(z+c) - (1-2\mu)z^2 - \frac{5x^2z(z+c)}{R_2^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8-9)$$

按照 Mindlin 基本解得到的形式, 也可以求地基内部在外荷作用下的附加应力, 只需要对已计算得到的分布荷载进行面积积分即可。Mindlin 基本解常常应用于单桩的受力计算和承载力的分析问题。

在 Boussinesq 和 Mindlin 这两类基本解中, 求解的微分方程都是弹性理论的微

分方程,只是作用力边界条件的差异。因此,它们都是以定解形式出现的微分方程的解答,应力和位移的解析解完整,此处仅给出土力学中应用的应力解析解,而位移解因土体的变形特性差异较大而不接受。地基 Boussinesq 解和 Cerrut 解在工程界可以反映外荷作用引起的地基应力传递的,常常作为分布荷载积分求解外荷作用在地基内部产生附加应力的依据,并且将该附加应力作为计算地基产生压缩变形导致地基沉降量的依据。第二类定解 Mindlin 解则反映了地基土在内部受荷作用后应力的传播。在实用中,常将这一类基本解应用于求桩的受力问题。

8.4 地基沉降计算的实用方法

在地基沉降实用计算方法中,计算过程依据的原理大致可以分为以下几类:一类是依据室内侧限压缩试验模拟土体的变形和土体变形主要是孔隙比的减少而建立地基沉降的计算公式;二是依据三轴压缩试验的测试分析由土的非线性应力应变特征建立非线性变形模量求地基的沉降量;再者就是依据实测地基沉降的变形特征进行分析,求得地基的沉降量。对于工程具体地基土类的复杂性来说,合理选择沉降计算方法和相关参数则是至关重要的。本节给出几种典型的计算地基沉降的实用方法以供参考。

一般说来,建筑物荷载引起的沉降按发生的过程可分为三个主要部分:初始沉降、固结沉降和次压缩沉降,后者也可称为次固结沉降(图 8-3)。在具体工程使用中,理应合理、正确地选择相应的沉降计算方法。

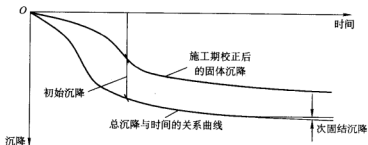


图 8-3 地基沉降的构成

由于建筑物基础面积是有限的,相比地基来说,刚度较大,通过基础荷载作用后,地基中会发生剪切变形并在基础底面边缘处有应力集中,在荷载加上的瞬时,地基产生畸变立即发生沉降,称为初始沉降,此时只有形状发生剪切畸变,而无体积变形。固结沉降是地基中土粒骨架之间的孔隙水分逐渐排出而引起的那

一部分沉降。次压缩沉降是地基中土粒骨架在持续荷载作用下发生颗粒重新或定向排列蠕变所引起的变形。

上述沉降变化过程,对粘性土地基是合适的。但对于砂性土地基,由于一般砂土渗水性强,固结完成快,初始沉降与固结沉降已分不开,也不出现次固结沉降。本节讨论粘性土地基的沉降计算的实用方法。

8.4.1 初始沉降

1. 计算公式

初始沉降也称瞬时沉降或弹性畸变引起的沉降。初始沉降可按下述弹性理论公式进行估算,当作用于地基土表面的荷载分布为圆形或矩形面积且压力为均布竖向荷载时,可以利用弹性力学的关于地表沉降的解答公式,初始沉降 S_d 表述为

$$S_d = C_d q B \left(\frac{1 - \mu^2}{E} \right) \quad (8-10)$$

式中 q ——均布荷载;

B ——荷载面积的直径或宽度;

C_d ——考虑荷载面积形状和沉降计算点位置的系数,见表 8-1、8-2;

E 和 μ ——土的弹性模量与泊松比。

表 8-1 半无限弹性体表面各种均布荷载面积上各点的 C_d 值

形 状	中心点	角点或边点	短边中点	长边中点	平均
圆形	1.00	0.64	0.64	0.64	0.85
圆形(刚性)	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79
方形	1.12	0.56	0.76	0.76	0.95
方形(刚性)	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
矩形长宽比:					
1.5	1.36	0.67	0.89	0.97	1.15
2	1.52	0.76	0.98	1.12	1.30
3	1.78	0.88	1.11	1.35	1.52
5	2.10	1.05	1.27	1.68	1.83
10	2.53	1.26	1.49	2.12	2.25
100	4.00	2.00	2.20	3.60	3.70
1000	5.47	2.75	2.94	5.03	5.15
10000	6.90	3.50	3.70	6.50	6.60

表 8-2 均匀分布荷载作用中心点处的 C_4 值 (下卧岩层)

H/B	圆形直径 = B	矩 形						条形
		$L/B=1$	$L/B=1.5$	$L/B=2$	$L/B=3$	$L/B=5$	$L/B=10$	$L/B=\infty$
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	00
0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	00
0.25	0.24	0.24	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.09
0.5	0.48	0.48	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.23
1.0	0.70	0.70	0.81	0.83	0.83	0.83	0.83	0.47
1.5	0.80	0.86	0.97	1.03	1.07	1.08	1.08	0.83
2.5	0.88	0.97	1.12	1.22	1.33	1.39	1.40	1.08
3.5	0.91	1.01	1.19	1.31	1.45	1.56	1.59	1.40
5.0	0.94	1.05	1.24	1.38	1.55	1.72	1.82	1.60
∞	1.00	1.12	1.36	1.52	1.78	2.10	2.53	1.83
								∞

2. 弹性参数的估计

由于粘性土是非线性体, 它们的弹性参数 E 和 μ 不是常数, 应考虑它们随应力大小而变化的情况。设粘性土地基饱和, 当瞬时加荷时, 认为体积是不可压缩的, 即孔隙水来不及排出, 泊松比 μ 的数值可采用 0.5。对于弹性模量 E , 一般可以按三轴不排水试验或侧限压缩试验得到的土的应力—应变关系曲线所确定的初始切线模量应用。

初始沉降占建筑物总沉降的可能比重, 视基础的几何尺寸和埋置深度、粘土地基的受压层厚度等因素而定。用式 (8-10) 计算初始沉降, 虽然简单可取, 但需要假定地基为均质弹性体。如果地基土层软硬变化显著, 上述公式所算得的结果就可能有较大误差, 所计算的初始沉降需要校正。

8.4.2 固结沉降的计算

1. 侧限压缩试验为资料的地基沉降计算

在常用的固结压缩仪中, 土样在不允许侧向变形 (侧限为 K_0 状态) 的情况下做压缩试验, 逐级加荷。每一级加载后, 土样的变形达到稳定状态后再加下一级荷载。所得的结果用孔隙比与压力的关系曲线 ($e-P$ 曲线) 来表示。地基土样的侧限压缩试验得到的试验结果, 是基于土粒不可压缩的假定, 土体的变形主要是孔隙比的减少, 因此, 理论上应属于的固结沉降的范畴。

应用侧限条件下的试验成果计算地基最终沉降量时, 常常要对所得到的结果进行经验系数的修正。

(1) 基本公式形式 计算沉降 S

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \frac{e_{1i} - e_{2i}}{1 + e_{1i}} H_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + e_{1i}} \Delta p_i H_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{si}} \Delta p_i H_i \quad (8-11)
 \end{aligned}$$

式中 ΔS_i ——分层计算沉降量；

n ——分层土层数量；

e_{1i} 、 e_{2i} 、 H_i ——依据 $e-p$ 压缩曲线对应第 i 土层的初始、压缩稳定后的孔隙比和土层厚度；

a_i 、 Δp_i 、 E_{si} ——第 i 土层的压缩系数、压缩应力和压缩模量。

由式 (8-11) 修正后的地基沉降量表示为 S_c 。

$$S_c = \psi_s S \quad (8-12)$$

式中 ψ_s ——修正系数，不同行业的地基沉降量的修正方法可见相关规范

如果将压缩试验的成果整理成 $e-\lg p$ 曲线，则一个很大优点是在实用压力范围内的曲线段近似于直线，压缩性指标可以认为是常数而不随压力而变，这使得沉降计算非常方便。对于 $e-\lg p$ 曲线首段，一般表现为曲线段，主要受土的压缩应力的固结历史过程影响，即前期固结应力影响的结果。当前期固结压力 p_c 确定之后，可以依据土层现有自重应力的比较，将土分为欠固结、正常固结和超固结土，欠固结土、正常固结土的压缩曲线为以压缩指数 C_c 为斜率的直线；超固结土的回弹再压缩指数为 C_s 。同时， $e-\lg p$ 曲线的表达方法还有另一个优点，依据首段曲线段，可以找出这种土的前期固结压力 p_c （即对现场土层的地质历史上曾受过的最大固结压力）。由 p_c 和土样在地基中某一深度处所覆盖的竖向自重压力 p_0 值，判断现场土层是属于正常固结、超固结还是欠固结土。即若 $p_c = p_0$ ，称为现场土层为正常固结土； $p_c > p_0$ ，为超固结土； $p_c < p_0$ 为欠固结土。

对于这三类土，沉降计算公式的总形式和分项形式分别表示如下

$$S_c = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta e_i}{1 + e_i} H_i \quad (8-13)$$

正常固结土

$$\Delta e = C_c \lg \left[\frac{p_c + \Delta p}{p_c} \right]$$

超固结土

$$\begin{aligned}
 \Delta e &= e' + \Delta e'' \\
 \Delta e' &= C_s \lg \left[\frac{p_0 + (p_c - p_0)}{p_0} \right] = C_s \lg \left(\frac{p_c}{p_0} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Delta e'' = C_c \lg \left[\frac{p_c + (p_0 + \Delta p - p_c)}{p_c} \right] C_c \lg \left(\frac{p_0 + \Delta p}{p_c} \right)$$

欠固结土

$$\Delta e = C_c \lg \left[\frac{p_c + \Delta p}{p_c} \right]$$

(2) 土的先期固结应力及其确定经验法

1) Casagrande 方法。早在 1936 年, Casagrande 就发现, 固结试验中进行几次加荷—卸荷—再加荷的过程的 $e-\lg p$ 曲线,

如图 8-4 所示。前期固结应力愈大, 卸荷后的回弹曲线斜率愈陡, 而所有再压缩曲线的斜率几乎都与开始部分的回弹曲线斜率基本一致。基于这一曲线的特征, Cassagrande 找到一个确定前期固结压力 p_c 的经验作图方法, 简称卡氏法: 即在再加荷曲线上找出曲率半径最小的一点 (曲率最大点); 从这一点绘水平线和切于该点的切线, 有以上两线所组成的角度作平分线; 平分线与试验曲线直线部分的延伸段交于一点, 该点所对应的压应力, 即为前期固结应力 p_c , 见图 8-4。卡氏法的关键是如何找出曲线上曲率最大点, 采用观察和几何的方法容易引起较大的误差。

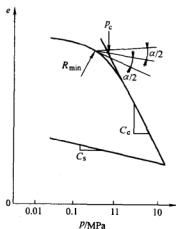


图 8-4 求前期固结应力的 Casagrande 方法

2) Schmertmann 法。在 19 世纪 40 年代, Schmertmann 发表了另一个求前期固结压力的方法, 如图 8-5。在固结试验时, 当 $e-\lg p$ 曲线已呈现直线段后, 立即进行卸荷回弹及再压缩加荷试验, 因此得到由回弹与再压缩曲线包围所组成的一个特征三角形 (图中划线部分)。将这三三角形两直线边平行上推至第一次压缩曲线上, 组成另一三角形, 试其位置, 使三角形的两直线边投影至斜直线延伸段 (即现场压缩曲线) 上, 使两直线边 $ab = ac$, 该位置恰与前期固结应力所对应。即 a 点所对应的横轴坐标为前期固结应力 p_c 。

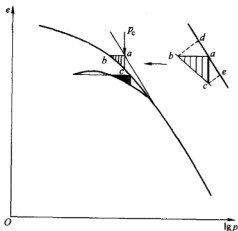


图 8-5 求前期固结应力的 Schmertmann 法

1955 年, Schmertmann 又提出了三个方法, 参阅图 8-6, b 点坐标 e_0 、

p_0 代表土样处于天然状态。 e_0 是土样在天然状态下的孔隙比, p_0 是有效竖向应力。从 b 作直线 bd , 使与回弹曲线的平均斜率平行。在这 bd 线上选一假设的 p_c 值, 于是可试绘土在天然状态下压缩曲线 bc , 以虚线表示。 c 点是相应于压缩曲线上孔隙比 $e_c = 0.42e_0$ 的一点, 天然状态下的压缩曲线 bc 与室内压缩曲线之间的垂直距离为 Δe , 取不同位置并画 $\Delta e - \lg p$ 的关系曲线, 如图 8-6 的下半部所示。假定不同的 p_c 值, 重复上宗步骤, 可得到不同的 $\Delta e - \lg p$ 曲线, 相应于真正的 p_c 值, $\Delta e - \lg p$ 曲线必然呈现最对称的形式。

3) 求前期压力的其他方法。进入 19 世纪 70 年代以来, 国内外学者和研究人员分别从试验加载分级控制 (如等加荷速率)、孔隙压力变化、试验数据曲线整理的不同形式、压缩曲线段的数值拟合等方面进行研究, 以求得前期固结压力的可靠和准确。但多是基于 Casagrande、Schmertmann 的主要的结论上的改进。值得强调的是, 求前期固结应力的室内压缩试验, 采用尽可能不扰动的原状土样是很重要的。

2. 考虑侧向变形的固结沉降

利用 $e-p$ 曲线和 $e-\lg p$ 曲线计算沉降, 源于单向压缩的直接模拟, 概念明确。而 $e-\lg p$ 曲线, 对正常固结、超固结和欠固结粘性土, 可分别对待, 这应该说比利用 $e-p$ 曲线计算沉降是前进了一步。实际上, 地基中的土受到附加应力后, 变形并不像在固结仪中所模拟的单向压缩。侧向变形对固结沉降的影响很大, 特别是当地基中粘性土层的厚度类比基础面积的尺寸较大时, 这对固结沉降影响就更大。Schempton-Bjerrum 利用半经验方法来解决这一问题。

对于实际地基内部任一点, 设作用于土样单元上的原垂直和水平方向的压力是 p'_1 和 p'_3 , 在开始加荷的瞬时, 若所增加附加应力 $\Delta\sigma_1$ 和 $\Delta\sigma_3$, 对饱和土来说, 瞬时体积改变 $\Delta V = 0$, 但土样产生了畸形, 这就是瞬时弹性变形, 其竖向变形即是如前所述的初始沉降。显然, 这时垂直和水平方向有效主应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= p'_1 + \Delta\sigma_1 - \Delta u \\ \sigma'_3 &= p'_3 + \Delta\sigma_3 - \Delta u \end{aligned} \right\} \quad (8-14)$$

式中 Δu ——孔隙水压力。

当土体固结时, 孔隙水随着时间而逐渐排出, 固结沉降增加, Δu 逐步减小; 当土体完全固结时, $\Delta u = 0$, 最终有效主应力为

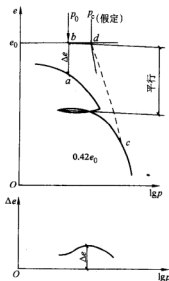


图 8-6 求前期固结应力的方法

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= p'_1 + \Delta\sigma_1 \\ \sigma'_3 &= p'_3 + \Delta\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

从式 (8-14) 和式 (8-15) 的比较可以看出：在固结初始过程中，土体在水平方向开始是膨胀，后来就逐步压缩；在垂直方向，固结过程使土体进一步压缩。在计算地基沉降时，应该求垂直方向瞬时弹性变形和固结变形之和，而变形计算还应充分考虑水平侧向变形的影响。

三轴压缩试验加荷过程的孔隙水应力增量公式为

$$\Delta u = B [\Delta\sigma_3 + A (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \quad (8-16)$$

式中，第一项表示附加应力 $\Delta\sigma_3$ 引来的孔隙压力，第二项表示偏应力 ($\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$) 所引来孔隙压力。 A 、 B 称为孔隙压力系数，可用三轴仪测定。对于饱和土，系数 $B=1$ ， $\Delta\sigma_3$ 引起的孔隙水压力的增长与周围附加应力 $\Delta\sigma_3$ 相等。系数 A 视土在地质土层应力历史上受压的情况而定。对于一般超固结土， $A=0\sim 0.5$ ，对一些特殊超固结土，甚至会产生负值，正常固结土 $A=0.5\sim 1.0$ ；特别灵敏的粘土 A 可以超过 1.0。

当 $B=1$ ，式 (8-16) 也可写成

$$\Delta u = \Delta\sigma_1 \left[A + \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1} (1 - A) \right]$$

设 m_v 是土的体积压缩系数，对于厚度为 H 的土层，固结变形的压缩量可计算，即

$$S'_c = \int_0^H m_v \Delta u dz = \int_0^H m_v \Delta\sigma_1 \left[A + \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1} (1 - A) \right] dz$$

而单向压缩的固结变形为

$$S_c = \int_0^H m_v \Delta\sigma_1 dz$$

设比例系数 C_p ，定义为代表这两个固结变形之比，则

$$C_p = \frac{S'_c}{S_c} = \frac{\int_0^H m_v \Delta\sigma_1 \left[A + \frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1} (1 - A) \right] dz}{\int_0^H m_v \Delta\sigma_1 dz}$$

对于某一指定土层来说， m_v 和 A 都是常数，因而有

$$C_p = A + \frac{\int_0^H \Delta\sigma_3 dz}{\int_0^H \Delta\sigma_1 dz} (1 - A) = A + a(1 - A) \quad (8-17)$$

式中 $a = \frac{\int_0^H \Delta\sigma_3 dz}{\int_0^H \Delta\sigma_1 dz}$ 。 A 值的大小视荷载面的形状及土层厚度 z 而定，

只有 A 值接近于 1, 或为浅层压缩土 (z/B 较小时), 利用单向压缩的公式计算固结变形才是比较正确的。否则, 考虑侧向变形的固结沉降, 单向压缩固结变形 S_e , 应乘以 C_p 修正系数, 见图 8-7。由此可得到考虑侧向变形的沉降量, 即

$$S_e = C_p S_{e0}$$

8.4.3 次固结沉降

次固结沉降也称次压缩, 一般认为是土体在有效应力已经基本上不变、土的体积仍随时间增长而发生的压缩。次压缩过程被认为是粘土颗粒片架的调整所致。实际上也有微小的超孔隙压力存在, 使水在土粒之间流动, 但由于次压缩进行得极慢, 水的流动速度是很小的, 上述超孔隙压力小到无法测量。所以, 次压缩的体积变化速度与孔隙水从土中流出的速率无关, 与土层的厚度也无关。因此, 粘土层现场的次压缩速率可以直接从室内土样的试验成果资料来估算。

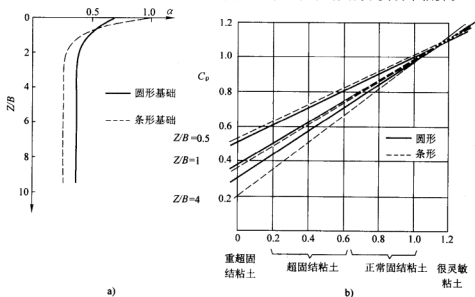


图 8-7 修正系数 α 和 C_p

室内试验和现场量测的结果表明, 次压缩的大小与时间的关系在以时间为对数的半对数坐标图上接近于直线, 并发生于主固结完成之后, 如图 8-8 所示。因此, 次压缩引起的孔隙比变化可表示为

$$\Delta e = -C_a \lg \frac{t_2}{t_1} \quad (8-18)$$

式中 C_a ——曲线上直线段的斜率, 称为次压缩系数;

t_1 ——相当于主固结达到 100% 的时间；

t_2 ——需要计算次压缩的时间。

次压缩系数 C_α 的大小主要视土类而不同。在缺乏试验资料时，可参照表 8-3 选取。从表中可看出，当地基土由可塑性大的土或有机土组成时，次压缩沉降必占地基总沉降中很可观的一部分。

表 8-3 次压缩系数 C_α 的典型值

土 类	C_α
正常固结粘土	0.005 ~ 0.02
塑性大的土, 有机土	≥ 0.03
超固结土(超固结比 $P_c/P > 2$)	< 0.001

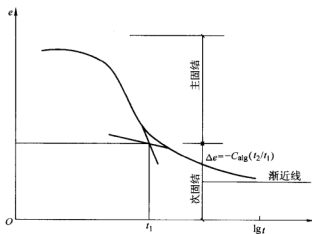


图 8-8 次固结沉降曲线

当无试验资料时，次压缩系数 C_α 也可按天然含水率来谨慎估计

$$C_\alpha = 0.018 W$$

式中 W ——土的天然含水率，以小数计。

对于同一种土来说，应力增量与初始应力之比越小，次压缩与主固结两种沉降之比就越大，见图 8-8。图 8-8 也说明一般形式的时间—压缩曲线，次固结变形只发生在应力增量较大的情况下，实践中所遇到的工程应力增量多数是比较大的。试验加荷必须符合现场实际荷载的增量比。

8.4.4 黄文熙三维压缩法

黄文熙(1957 年)建议在依据单向压缩试验成果计算地基沉降量时，在计

算中应考虑土体三维变形情况。在三维应力状态下,依据式(8-2)竖向应变表式达式为

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_z - \mu\Theta] \quad (8-19)$$

式中 $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 。

在球应力作用下土体体积应变为

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} \Theta = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1}$$

式中 e_1 和 e_2 ——压缩前和压缩后的孔隙比。

由上式可得

$$E = (1 - 2\mu) \frac{1 + e_1}{e_1 - e_2} \Theta$$

或

$$\varepsilon_z = K \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1}$$

式中

$$K = \frac{1}{1 - 2\mu} \left[(1 + \mu) \frac{\sigma}{\Theta} - \mu \right]$$

于是有沉降计算公式

$$S = \sum_{i=1}^n K_i \frac{e_{1i} - e_{2i}}{1 + e_{1i}} H_i \quad (8-20)$$

式中 H_i ——第 i 层土厚度;

e_{1i} 、 e_{2i} ——压缩前和压缩后土体的孔隙比;

K_i ——修正系数。

8.4.5 三维压缩非线性模量法

龚晓南(1984)根据正常固结粘土三轴固结排水剪切试验应力应变曲线归一化性状,即 $(\sigma_1 - \sigma_3) / p' - \varepsilon_1$ (轴向应变) 曲线,将土体切变模量和切变泊松比表示为

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{3\bar{E}_0 p'}{3 - Mr_s} (1 - R_f r_s)^2 \\ \mu_1 &= \mu_0 + (\mu_f - \mu_0) r_s \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

式中 \bar{E}_0 ——归一化应力应变曲线的初始斜率;

M —— $p-q$ 平面上破坏线斜率, $M = \frac{6\sin\varphi'}{3 - \sin\varphi'}$;

φ' ——土体有效内摩擦角;

R_f ——土体破坏比,

$$R_f = \frac{M}{M_{ult}}$$

M_{ult} —— p' - q 平面上极值线斜率。

r_s ——某应力状态下 (p' , q) 土体强度发挥度, 其定义为 $r_s = \frac{q/p'}{M}$;

q ——主应力差, $q = \sigma_1 - \sigma_3$;

p' ——平均有效应力, $p' = \frac{1}{3} (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$;

μ_o ——土体初始泊松比;

μ_f ——土体破坏时泊松比, 一般可取 0.5。

采用三维压缩非线性模量法计算沉降时, 将地基压缩层厚度范围内土层分成 n 层, 将荷载分成 m 个荷载增量, 求出在某级荷载作用下地基中的附加应力, 并求出土体模量, 然后应用广义胡克定律, 分层计算各级荷载作用下的竖向地基压缩量, 通过求和得到总沉降。沉降计算式为

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_{ij}} [\sigma_{zij} - \mu_{ij}(\sigma_{xij} + \sigma_{yij})] H_j \quad (8-22)$$

式中 E_{ij} ——第 i 级荷载作用下第 j 层地土体的强度发挥度对应的切变模量;

$\sigma_{xij}, \sigma_{yij}, \sigma_{zij}$ ——分别为沿 x , y 和 z 方向第 j 层土中第 i 级平均附加应力增量, 应用 8.2 节基本解计算;

μ_{ij} ——第 i 级荷载作用下第 j 层土土体强度发挥度对应的切变泊松比;

H_j ——第 j 层土厚度;

n ——计算土层数;

m ——荷载增量数。

通常可以采用第 $i-1$ 级荷载作用下对应土体的模量。求第 i 级荷载作用下基中应力, 可得到第 i 级荷载作用下对应的土体模量。根据第 i 级荷载作用下的应力和模量可计算相应的各土层的压缩量。

8.4.6 各向异性的双层地基

天然形成的双层地基可能有两种形式, 一种是上软下硬的地基土层, 如岩石层上覆盖有可压缩土层; 一种是上硬下软的地基土层, 如覆盖层有下卧软弱土层。前者会出现应力集中现象, 岩层的埋藏深度与应力集中的影响有关, 埋藏深度愈浅, 应力集中的影响愈显著; 后者会出现应力扩散现象, 上下层的模量比愈大, 应力扩散的影响愈显著。黄文熙 (1957 年) 曾给出了 Boussinesq 解的系数修正值的范围。但一般工程应用时, 常依据土层的变形模量 E_0 和泊松比 μ 为参数考虑双层地基的应力扩散或应力集中, 使用附加应力参数,

$$f = \frac{E_{01}1 - \mu_2^2}{E_{02}1 - \mu_1^2} \quad (8-23)$$

式中 E_{01} 、 E_{02} 和 μ_1 、 μ_2 ——分别为上、下双层地基的土层的变形模量和泊松比。

计算双层地基沉降时, 使用修正后的附加应力 σ_e , 即

$$\sigma_e = f\sigma_z \quad (8-24)$$

然后按前述分层总和法等方法来求地基的沉降量。

8.4.7 应力路径法

土体中一点的应力状态可以用应力空间中的一个应力点来描述。在荷载作用下, 土体中一点应力状态的改变过程可以用对应的应力点在应力空间的运动轨迹来描述。应力点在应力空间的运动轨迹称为应力路径。以三轴压缩试验为例, 取典型地基内土样模拟现场地基土层的初始应力状态和受荷后的应力状态, 得到相应的轴向应变 ϵ_z 和体积应变 ϵ_v , 结合边界条件进行总应力和有效应力路径的抗剪强度分析和现场地基沉降情况分析, 求得各层地基相应应力状态下的沉降量, 按分层总和法得到地基的初始沉降和固结沉降, 然后进行经验修正。

8.4.8 由沉降观测曲线推测后沉降

由观测的地基沉降曲线, 如图 8-9 所示, 施工期为 T 。可将沉降分为初始瞬时沉降 S_d 和固结沉降 S_c 两段, 则 t 时刻的地基沉降 S_t 为

$$S_t = S_d + S_c$$

按假定不同的沉降变形阶段曲线形式, 求得地基的沉降量。一般地, 对于施工期 T 的沉降量观测值, 常采用将在工期内处理成一半时间进行沉降与时间关系整理, 然后进行沉降曲线的模拟。常采用的模拟曲线为指数曲线和双曲线的形式, 以观测值和时间为已知点, 推求相关参数, 进而得到最终沉降 S 在 t 时刻的沉降量 S_t 。

1. 指数曲线模拟

t 时刻的地基沉降量 S_t 和地基固结度表示为

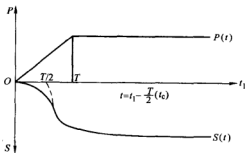


图 8-9 地基沉降观测曲线

$$\left. \begin{aligned} S_t &= S_d + U_t S_c \\ U_t &= 1 - A \exp(-Bt) \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

式中 A 、 B ——固结度指数参数。

将上式加以整理, 可得

$$S_t = S[1 - A \exp(-Bt)] + S_d \exp(-Bt)$$

上式中包含最终沉降 S 和固结度指数参数 A 、 B , 任选用三个观测的时间 t 和对应沉降 S_t , 即可联立求得。

$$\begin{aligned} S_{ti} &= S[1 - A \exp(-Bt_i)] + S_d \exp(-Bt_i) \\ \exp[-B(t_i - t_{i-1})] &= \exp[-B(t_{i+1} - t_i)] \end{aligned}$$

上式中, i 可以 1, 2, 3 轮换, 解方程组得到参数, 例如

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \ln \frac{(S_2 - S_{11})}{(S_3 - S_2)} \\ S &= \frac{S_3(S_2 - S_{11}) - S_2(S_3 - S_2)}{(S_2 - S_{11})(S_3 - S_2)} \end{aligned}$$

2. 双曲线模拟

沉降观测资料也可用双曲线模拟, 有

$$\left. \begin{aligned} t &= a + t_c \\ S &= S_c - S_t \\ s_t &= s_c \frac{t_c}{a + t_c} \end{aligned} \right\} \quad (8-26)$$

式中 t_c ——固结开始计算的时间;

S ——计算地基产生的最终沉降量, 即 t 时间的终止点沉降;

a ——时间换算起点坐标;

S_t ——计算 t 时刻沉降量。

将整理实测曲线 $S-t$ 曲线上二点 (S_1, t_1) 和 (S_2, t_2) 代入式 (8-26) 可得 S_c 和 a 值:

$$\begin{aligned} a &= \frac{S_2 t_1 t_2 - S_1 t_1 t_2}{S_1 t_2 - S_2 t_1} \\ S_c &= S_1 S_2 \frac{t_2 - t_1}{(S_1 t_2 - S_2 t_1)} \end{aligned}$$

总沉降为

$$S = S_d + S_c$$

式中 S_d ——沉降曲线 $S-t$ 曲线上拐点 B 对应的沉降。

除了上述方法外, 国内外学者还提出了另外一些方法, 对数据处理和数值模

拟的方法可以有多种形式,还可以进行数据处理的各种优化分析,准确度取决于实际的沉降—时间曲线的实际形状。然而影响沉降—时间曲线形状的因素很多。很难说哪一种配合法更好。除了采用曲线配合外,还可采用反分析法估计最终沉降。采用反分析法计算最终沉降基本思路如下:根据初期的观测资料,通过反分析法得到地基土的参数,然后通过正分析得到最终沉降。该法适应性较广的反分析法是将数值分析方法同数学规划法相结合的直接反分析法。

8.4.9 特殊土的沉降计算

我国分布的特殊土类型很多,从北方的冻土到南方的红土,西北的黄土到沿海的软土,局部地区的区域土到各地分布的膨胀土、盐渍土、填土等,下面将给出湿陷性黄土和膨胀土的沉降计算公式。

1. 湿陷性黄土

湿陷性黄土是指在自重应力或附加应力或共同作用下受水浸湿时产生急剧且较大的下沉量的土,这种现象称之为湿陷性。湿陷性黄土又分为自重湿陷性黄土和非自重湿陷性黄土,在自重应力作用下受水浸湿后产生湿陷称之为自重湿陷性黄土;在自重应力和附加应力共同作用下浸水产生湿陷称为非自重湿陷性黄土。湿陷性系数设为 δ_s :

$$\delta_s = \frac{h_p - h'_p}{h_0} \quad (8-27)$$

式中 h_0 ——土样的初始高度;

h_p ——土样在压力作用下压缩稳定后的高度;

h'_p ——土样浸水下沉稳定后的高度。

测定湿陷系数的压力,应依据黄土地基中的实际受力。但一般地,从基础底面起算(初勘时地面 1.5m),10m 以内的土层采用 200kPa,10m 以下至非湿陷性土层使用饱和自重应力,大于 300kPa 时,仍采用 300kPa (黄土规范);当基底压力大于 300kPa,采用实际的基底压力。

当 $\delta_s < 0.015$ 时,为非湿陷性黄土;

$\delta_s \geq 0.015$ 时,为湿陷性黄土。

建筑地基为湿陷性黄土的沉降量计算,一般只计算自重湿陷量和总湿陷量即可。对于新近堆积的黄土,还应计算压缩变形量。

自重湿陷量按下式计算

$$\Delta z_s = \beta_0 \sum_{i=1}^n \delta z_{si} H_i \quad (8-28)$$

式中 Δz_s ——自重湿陷量;

β_0 ——修正系数,随不同地区黄土湿陷敏感性而异。通常由现场浸水试

验和计算对比确定, 经验资料是: 陕北陇东地区可取 1.2, 陇西地区可取 1.5, 关中地区可取 0.7, 其他地区一般取 0.5;

δ_{zi} ——第 i 土层的在覆盖自重压力下的湿陷系数;

H_i ——第 i 土层的厚度。

黄土地基受水浸湿饱和并下沉稳定后, 地基的总湿陷量

$$S_s = \sum_{i=1}^n \beta \delta_{zi} H_i \quad (8-29)$$

式中, β 、 δ_{zi} 、 H_i 分别为地基浸水因素修正系数、第 i 土层的湿陷系数和土层厚度。其中, 修正系数基底 5m 压缩层深度内可取 1.5, 5m 以下, 非湿陷性黄土取 0; 自重湿陷性黄土地取自重湿陷系数 β_0 采用。

2. 膨胀土地基的变形量计算

膨胀土地基的变形量计算分为三种情况:

1) 当离地面 1m 处地基土的天然含水率等于或接近最小值时, 或地面有覆盖且无蒸发可能性, 以及建筑物在使用期间经常有水浸湿地基时, 可按式计算地基土膨胀变形量

$$S_c = \Psi_c \sum_{i=1}^n \delta_{cpi} H_i \quad (8-30)$$

式中 Ψ_c ——修正系数, 根据当地经验确定, 三层及三层以下建筑物可取 0.6;

δ_{cpi} ——基础底面以下第 i 层土平均自重应力和平均附加应力之和作用下的膨胀率, 可由室内试验测定;

H_i ——第 i 层土的计算厚度;

n ——计算厚度内土层的数。

2) 当离地表面 1m 处地基土的天然含水率大于 1.2 倍塑限含水量时, 或直接受高温作用的地基, 按下式计算地基的收缩变形量 S_s 。

$$S_s = \Psi_s \sum_{i=1}^n \lambda_{si} \Delta \omega_i H_i \quad (8-31)$$

式中 Ψ_s ——经验系数, 可由当地经验确定, 无经验时, 对于三层及以下建筑时可取 0.8;

λ_{si} ——第 i 层土的收缩系数, 由室内试验测定;

$\Delta \omega_i$ ——地基土收缩过程中, 第 i 层土发生含水率变化的平均值, 在计算深度内, 各层含水率均值按下式计算

$$\Delta \omega_i = \Delta \omega_1 - (\Delta \omega_1 - 0.01)(Z_i - 1)/(Z_n - 1)$$

$$\Delta \omega_1 = \omega_1 - \Psi_w \omega_p$$

式中 ω_1 、 ω_p ——地表下 1m 处, 土的天然含水率和塑限含水量;

Ψ_w ——土的湿度系数;

Z_i ——第 i 土层的深度, m;

Z_n ——土层的计算深度, 可取大气影响深度, m; 在地表面以下土层 4m 深度内存在不透水岩石时, 可假定含水率为常数; 在计算深度内有稳定的地下水时, 取计算水位以上 3m。

3) 在其他情况下, 按下式计算地基土的胀缩变形量

$$S_{zs} = \Psi \sum_{i=1}^n (\delta_{cpi} + \lambda_{si} \Delta \omega_i) H_i \quad (8-32)$$

式中 Ψ ——经验系数, 可取 0.7, 其他同前式含义。

3. 冻土的冻融

冻土在冻结和冻融的过程中, 土中水出现聚集、迁移使土体产生体积变化。冻结过程中导致体积膨胀, 冻融过程中出现下沉融陷。反映冻土冻结和冻融的变形分别用冻胀量和融陷量来表示。

天然地基土的冻胀量, 应该根据现场实测确定。对于无地下水源补给的天然地基, 在无实测资料时, 可按式 (8-33) 计算冻胀量

$$S_D = 1.09 \int_0^H \frac{\gamma_d}{\gamma_w} (\omega - \omega_p) dz \quad (8-33)$$

式中 γ_d ——土的干重度;

γ_w ——水的重度;

ω ——土的含水率;

ω_p ——土的塑限。

冻土在冻融过程中, 融陷量分为在无外荷载作用下产生的沉降和外荷载作用下所产生的融化压缩两部分, 分别使用融陷系数和融化压缩系数计算。

融陷系数

$$A_D = \frac{\Delta h}{h} \times 100\%$$

式中 Δh ——土体在自重作用下的稳定融化量;

h ——冻土试样高度或稳定融化层厚度。

融化压缩系数

$$a_{Di} = \frac{(S_{i+1} - S_i)/h_i}{p_{i+1} - p_i}$$

式中 p_{i+1} 、 p_i ——分级荷载;

S_{i+1} 、 S_i ——对应于分级荷载的下沉量;

h_i ——冻土试样高度。

冻土的融陷量 S_d

$$S_d = \sum_{i=1}^n A_D H_i + \sum_{i=1}^n a_{Dp} \Delta p_i H_i \quad (8-34)$$

建筑物地基沉降计算，在工程实际中占有十分重要的地位。然而达到计算量和实际沉降量的一致，目前还有一定的困难。就同一地基来说，应用不同的计算方法所得到的沉降量在数值上也有一定的差别。这其中有关地基应力计算的依据问题，也有计算方法的前提假定问题，更有现场地基土模拟试验的条件和误差问题，以及人们对地基的工程认识和应用方法的评估问题。因此，本章所述的地基应力和地基沉降计算方法，只是地基沉降计算多种方法中一些代表。随着人们对地基土的认识、测试、研究等水平的进一步提高，对地基沉降量计算的准确性会更符合实际。

参 考 文 献

- 1 钱家欢，殷宗泽主编．土工原理与计算．第2版．北京：中国水利水电出版社，1996
- 2 龚晓南主编．高等土力学．杭州：浙江大学出版社，2000
- 3 沈珠江著．理论土力学．北京：中国水利水电出版社，2000
- 4 王国体等．地基反力的数值模拟和基础结构的内力响应．土木工程学报，2002（35）：2
- 5 岩土工程手册编写委员会．岩土工程手册．北京：中国建筑工业出版社，1994
- 6 黄文熙主编．土的工程性质．北京：水利电力出版社，1982
- 7 王国体主编．地基基础计算与程序设计．合肥：中国科学技术大学出版社，1991

第9章 土坡稳定分析

9.1 概述

自然生成的边坡,工程活动的需要筑成的边坡,在内因条件和外因条件的共同影响下,使得坡体在一定的应力和土体强度条件下保持着平衡稳定,当稳定所对应的外部条件发生改变时,其所对应的应力状态也将发生改变,当应力的改变并同时影响着坡面土体强度变化,旧的平衡被打破,新的平衡必将取代原有的平衡状态,因此就可能出现滑坡。为了对坡体进行安全性评价,人们建立了各种土坡稳定分析的方法和评价机制。值得注意的是,目前工程中的坡体稳定分析的方法大都建立在使用静态参数的基础上,稳定分析计算的结果是用安全系数去度量的,因而计算的结果是静态的反映。然而,土坡的安全性却相对是动态的、变化的,应当建立与其动态相适应的评价机制,迄今,对于土坡的真正动态的安全性评价还没有实现。

目前在工程应用实际中,评价坡体稳定的方法依然是安全系数的度量——相对是静态的方法。从19世纪20年代所提出的瑞典圆弧分析法,到当前各类的数值计算方法,应用土体的强度参数大多在某一确定强度条件下,建立坡体稳定分析的方法,求得土坡稳定的安全系数评价,并作为工程具体应用的依据。分析土坡稳定所采用的具体计算方法时,一般将土坡安全系数 F 定义为抗滑力矩和滑动力矩之比或抗剪强度和剪应力之比,通过假定不同的滑裂面试算,求得不同的安全系数,其中最小的安全系数值作为土坡稳定的安全系数和相应的滑裂面。采用条分法,将假设滑动土体划分为若干土条,从单元土条受力角度出发,考虑其边界受力条件,经过假定条件处理,以减少待定的未知量,应用极限平衡的原理,建立坡体整体评价的安全系数的计算方法。土坡稳定分析的研究发展大体分为:在19世纪60年代以前,以减少计算工作量、寻找滑动中心和滑裂面的规律为主要目标;随着计算机技术的发展,借助计算机程序设计提出了新的分析数值计算方法。但是,由于土的工程性质的复杂性、土坡结构的特殊性和土坡工程环境的变化性,坡体的安全性计算评价与工程实际还有一定的差距,随着科学的发展和技术的进步,土坡的安全评价将会得到进一步的完善和提高。

本章以工程实用为目的,重点介绍针对粘性土坡常采用的稳定分析方法:基本条分法和普遍条分法。对于基本条分法,鉴于本科教材中已作出了详细的分

析, 在此仅给出公式的基本形式, 以保持方法内容的完整性和连续性; 对普遍条分法作较为系统的叙述, 包括 Morgenstern 法、陈祖煜法、Sarmar 法、Spencer 法、Janbu 法等, 最后对粘性土坡的稳定分析方法作一简单的讨论。涉及稳定分析计算程序的设计和应用以及土坡的支护、防护、滑坡治理等方面的内容可以参考相关文献。

9.2 基本条分法

基本条分法是基于均质粘性土, 当出现滑动时, 其滑动面接近圆柱面和圆锥面的空间组合, 简化为平面问题时接近圆弧面并作为实际的滑动(滑裂)面。将圆弧滑动面与坡面的交线所组成的滑体部分, 进行竖向分条, 按不考虑条间力的作用效果进行简化, 将各个分条诸多力效果作用到的滑动圆弧上, 分析抗滑因素和滑动因素, 用抗滑力矩比滑动力矩求得整个坡体安全系数。

基本条分法的计算过程通常是基于可能产生滑动(滑裂)圆弧面条件下, 经过假定不同的滑动中心、再假定不同的滑动半径, 确定对应的滑动圆弧, 通过分条计算所对应的滑体安全系数, 依此循环反复试算, 最终求出最小的安全系数和对应的滑弧、滑动中心, 作为对整个土坡的安全评价的度量。计算研究表明, 坡体的安全系数所对应的滑动中心区域随土层条件和土坡条件及强度而变化。如图 9-1 所示。

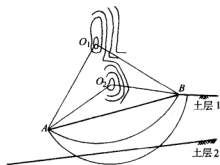


图 9-1 不同土层的 F_s 极小值区

圆弧基本条分法安全系数的定义早期为: $F_s = \text{抗滑力矩} / \text{滑动力矩}$, 即为

$$M_R / M_h, \text{ 尔后提出了安全系数的普遍定义 } F_s = \frac{\tau_f}{\tau}$$

9.2.1 瑞典条分法

如图 9-2 所示, 瑞典条分法的安全系数 F_s 的一般计算公式表达为

$$F_s = \frac{\sum (c_i l_i + W_i \cos \theta_i \tan \varphi_i)}{\sum W_i \sin \theta_i}$$

式中 W_i ——土条重力

θ_i ——土条底部中点与过圆弧中心连线的垂线的夹角。

抗剪强度指标 c 、 φ 值为总应力指标。也可采用有效应力指标并用于有效应力分析。 $W_i \cos \theta_i$ 中应力减去孔隙水应力影响即用 $(W_i \cos \theta_i - u_i b)$ 代替。工程中常用重度替代法进行计算, 安全系数公式中分子的重度在浸润线以上部分采用

天然重度，以下采用浮重度；分母中浸润线以上部分采用天然重度，以下采用饱和重度，这种方法既考虑了稳定渗流对土坡稳定性的影响，又方便了计算，其精度一般能较好地满足工程需要，在实际工程中得到广泛应用，应该指出的是，重度替代法只是一个近似公式，如图 9-3 所示， $h_i \neq h_{wi}$ 。

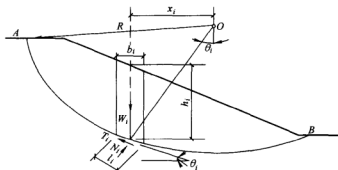


图 9-2 瑞典条分法

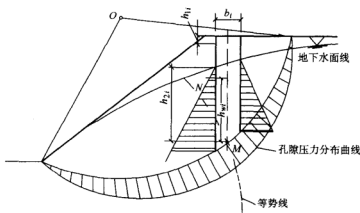


图 9-3 渗流孔隙水压力计算简图

重度替代法具体公式为

$$F_s = \frac{\sum [c_i l_i + (\gamma h_{1i} + \gamma' h_{2i}) b_i \cos \theta_i \tan \varphi_i]}{\sum (\gamma h_{1i} + \gamma_{sat} h_{2i}) b_i \sin \theta_i}$$

式中 h_{1i} ——土条 i 中线浸润线以上高度；

h_{2i} ——土条 i 中线浸润线以下高度。

9.2.2 简化 Bishop 计算公式

Bishop 考虑每一分条条间力的实际作用, 如图 9-4 所示, 其简化公式为

$$F_s = \frac{\sum \frac{1}{m_{\theta i}} (c_i b_i + W_i \tan \varphi_i)}{\sum W_i \sin \theta_i}$$

其中 $m_{\theta_i} = \cos \theta_i + \frac{\sin \theta_i \tan \varphi_i}{F}$,

该公式可用于总应力分析,也可用于有效应力分析,用于有效应力分析时 c 、 φ 为 c' 、 φ' 而 W_i 换为 $(W_i - u_i b)$ 。

简化 Bishop 重度替代法公式

$$F_s = \frac{\sum \frac{1}{m_{\theta i}} [c_i b_i + (\gamma h_{1i} + \gamma' h_{2i}) b_i \tan \varphi_i]}{\sum (\gamma h_{1i} + \gamma_{so} h_{2i}) b_i \sin \theta_i}$$

式中各参数含义同上。

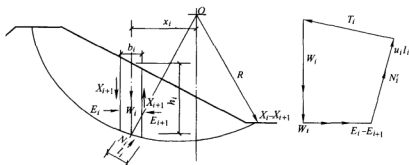


图 9-4 bishop 计算简图

9.3 普遍条分法实现

9.3.1 普遍条分法的一般假定

在边坡稳定极限平衡分析中,对作用在滑动土体中的土条某些未知内力,引入适当的假定,减少这些未知力数目,使问题变得静定可解。假定较多的主要为土条的侧向力方面,根据侧向未知内力假定的特点,可将这些方法分为:

1) 对土条侧向力倾角的分布规律作出假定, 这类方法的代表是

Morgenstern&Price、陈祖煜法。

2) 对土条侧向力大小的分布作出假定, 这一类方法的代表是 Sarma 法。

3) 对土条侧向力的作用位置作假定, 这一类方法的代表是 Janbu 法。

作侧向力的假定之后, 应用极限平衡原理对边坡建立稳定分析普遍条分法的基本公式。

1. 关于安全系数的定义

土坡沿着某一滑裂面滑动的安全系数定义: 将土的抗剪强度指标降低为 c'/F_s 和 $\tan\varphi'/F_s$, 则土体沿着此滑裂面处处达到极限平衡, 即

$$F_s = \tau_f / \tau \text{ 或}$$

$$\tau = c'_e + \sigma'_n \tan\varphi'_e$$

也可以表示为

$$c'_e = \frac{c'}{F_s}$$

$$\tan\varphi'_e = \frac{\tan\varphi'}{F_s}$$

上述将强度指标的储备作为安全系数定义。

2. 莫尔—库仑强度准则

假设土体的一部分沿着某一滑裂面滑动, 在该滑裂面上, 土体处处达到极限平衡, 即正应力 σ'_n 和剪应力 τ 满足莫尔—库仑强度准则。

对于孔隙水压力 u , 在有些公式中, 通常定义孔隙水压力比为

$$r_u = \frac{u}{dW/dx}$$

3. 静力平衡条件

将滑动土体分成若干土条后, 以每个土条和整个滑动土体都要满足力和力矩平衡方程为必要条件, 在建立的静力平衡方程组中, 未知数的数目超过了方程式的数目, 还应用坡体的边界等条件, 使剩下的未知数和方程数目相等, 从而解出安全系数的值。

4. 合理控制条件

对多余未知数进行假定的具体方案可以是多种多样的, 但也不是完全任意的。它必须使获得的解符合土的力学特性。目前, 被普遍应用的控制条件应该是:

1) 沿着划分的土条两侧垂直面上的剪应力不超过在这个面上所能发挥的抗剪能力, 也可以用安全系数来表示。

2) 假定土完全不能承受拉力, 为保证在土条接触面上不出现拉力, 要求作用在土条上的有效力的合力作用点不应落在土条垂直面的外面。

9.4 普遍条分法公式

9.4.1 Morgenstern 法、Price 法

Morgenstern 法、Price 法首先对任意曲线形状的滑裂面进行了分析,如图 9-5 所示,导出了满足力的平衡及力矩平衡条件的微分方程式,然后假定两相邻土条法向条间力和切向条间力之间存在对水平方向坐标的函数关系,从而根据整个滑动土体的边界条件求出问题的解答。

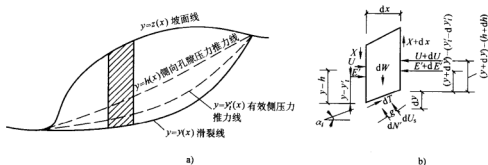


图 9-5 Morgenstern-Price 法坡面和土条、条间力分析

a) 任意形状的土坡 b) 作用于微分土条上的力

1. 条间力作用分析

如图 9-5 表示一任意形状的土坡,其坡面线、侧向孔隙水应力和有效应力的推力线及滑裂线分别以函数 $y = z(x)$ 、 $y = h(x)$ 、 $y = y'_1(x)$ 及 $y = y(x)$ 表示。图 9-5b 所示为其中任一微分 dx 土条,其上作用有重力 dW ,土条底面的有效法向反力 dN' 及切向阻力 dT ,土条两侧的有效法向条间力 E' 、 $E' + dE'$ 及切向条间力 X 、 $X + dX$; U 及 $U + dU$ 为作用于土条两侧的孔隙水应力, dU_s 为作用于土条底部的孔隙水应力。

2. 土条受力平衡方程式

对微分土条的底部中点 (dT 、 dN' 合力作用点) 取力矩平衡,则

$$E' \left[(y - y'_1) - \left(-\frac{dy}{2} \right) \right] - (E' + dE') \left[(y + dy) - (y'_1 + dy'_1) + \left(-\frac{dy}{2} \right) \right] - X \frac{dx}{2} - (X + dX) \frac{dx}{2} + U \left[(y - h) - \left(-\frac{dy}{2} \right) \right] - (U + dU) \left[(y + dy) - (h + dh) + \left(-\frac{dy}{2} \right) \right] - g dU_s = 0$$

将上式略去高阶微分量, 并且认为 dU_s 的作用点与 dT 、 dN' 的作用点重合 (取 $g=0$), 整理化简, 得到每一土条满足力矩平衡的微分方程式

$$X = \frac{d}{dx} (E'y'_t) - y \frac{dE'}{dx} + \frac{d}{dx} (Uh) - y \frac{dU}{dx} \quad (9-1)$$

再取土条底部法线方向力的平衡, 得

$$dN' + dU_s = dW \cos \alpha - dX \cos \alpha - dE' \sin \alpha + dU \sin \alpha$$

取平行土条底部方向力的平衡, 可得

$$dT = dE' \cos \alpha + dU \cos \alpha - dX \sin \alpha + dW \sin \alpha$$

又根据安全系数的定义及莫尔—库仑准则

$$dT = \frac{1}{F_s} [c' dx \sec \alpha + dN' \tan \varphi']$$

同时引用关于孔隙应力比的定义, 得

$$dU_s = \gamma_u dW \sec \alpha$$

综合以上各式, 消去 dT 及 dN' , 得到每一土条满足力的平衡的微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{dE'}{dx} \left[1 - \frac{\tan \varphi'}{F_s} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{dX}{dx} \left[\frac{\tan \varphi'}{F_s} + \frac{dy}{dx} \right] \\ &= \frac{c'}{F_s} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + \frac{dU}{dx} \left[\frac{\tan \varphi'}{F_s} \frac{dy}{dx} - 1 \right] + \\ & \frac{dW}{dx} \left\{ \frac{\tan \varphi'}{F_s} + \frac{dy}{dx} - r_u \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{\tan \varphi'}{F_s} \right\} \end{aligned} \quad (9-2)$$

式中 F_s ——稳定安全系数;

r_u ——孔隙应力比。

一般来说, 由于坡体边界 $y = z(x)$ 、 $y = h(x)$ 是已知的, 滑裂面 $y = y(x)$, 也为已知的, 在两个基本微分方程中的 $\frac{dW}{dx}$ 、 $\frac{dU}{dx}$ 及 $\frac{dy}{dx}$ 都可以求出。同时, 土性指标 c' 、 $\tan \varphi'$ 及孔隙压力比 r_u 也是给定的。因此, 要求的未知量就剩下 E' 、 X 及函数 $y = y'_t(x)$, 还有安全系数 F_s 。

3. 计算简化和假定条件

为了简化方程, 以土条侧面总的法向力 E 来代替有效法向力 E' , 则有

$$E = E' + U$$

其作用点位置 y_t 可用式 (9-3) 求出, 即

$$Ey_t = E'y'_t + Uh \quad (9-3)$$

同时, 因为 E 和 X 之间必定存在着一个对 x 的函数关系

$$X = \lambda f(x) E \quad (9-4)$$

式中 λ ——任意选择的一个常数。

对每一土条来说, 由于 dx 可以取得很小, 使 $y = z(x)$ 、 $y = h(x)$ 及 $y = y(x)$ 在土条范围内近似为一直线, 同样, 函数 $f(x)$ 在每一土条范围内也可以取作直线。因此, 在每一土条内有

$$y = Ax + B$$

$$\frac{dW}{dx} = px + q$$

及

$$f = kx + m$$

式中 A 、 B 、 p 、 q 、 k 及 m ——均为任意常数, 可通过几何条件及所选 $f(x)$ 的类型来确定。

经过以上各式的处理, 基本微分方程式 (9-1) 简化为

$$X = \frac{d}{dx}(E\gamma_t) - \gamma \frac{dE}{dx} \quad (9-5)$$

而式 (9-2) 简化为

$$(Kx + L) \frac{dE}{dx} + KE = Nx + P \quad (9-6)$$

$$\text{式中 } K = \lambda k \left(\frac{\tan \varphi'}{F_s} + A \right);$$

$$L = \lambda m \left(\frac{\tan \varphi'}{F_s} + A \right) + 1 - A \frac{\tan \varphi'}{F_s};$$

$$N = p \left[\frac{\tan \varphi'}{F_s} + A - \gamma_u (1 + A^2) \frac{\tan \varphi'}{F_s} \right]$$

$$P = \frac{c'}{F_s} (1 + A^2) + q \left[\frac{\tan \varphi'}{F_s} + A - \gamma_u (1 + A^2) \frac{\tan \varphi'}{F_s} \right]$$

取土条两侧的边界条件为

$$E = E_i \quad (x = x_i)$$

$$E = E_{i+1} \quad (x = x_{i+1})$$

对方程式 (9-6) 从 x_i 到 x_{i+1} 进行积分, 可以求得

$$E_{i+1} = \frac{1}{L + K\Delta x} \left(E_i L + \frac{N\Delta x^2}{2} + P\Delta x \right) \quad (9-7)$$

这样就可以从上到下, 逐条求出法向条间力 E 来, 然后根据式 (9-4) 求出切向条间力 X 。当滑动土体外部没有其他外力作用时, 对最后一土条必须满足条件

$$E_n = 0 \quad (9-8)$$

同时, 土条侧面的力矩可以用微分方程式 (9-5) 积分求出, 即

$$M_{i+1} = E_{i+1}(\gamma - \gamma_t)_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(X - E \frac{dy}{dx} \right) dx \quad (9-9)$$

最后也必须满足条件

$$M_n = \int_{x_0}^{x_n} \left(X - E \frac{dy}{dx} \right) dx = 0 \quad (9-10)$$

此时, 各条间力合力作用点位置 y_i 可由式 (9-9) 求出。

为了找到能够满足所有平衡方程的 λ 及 F_s 值, 我们可以先假定一个 λ 及 F_s , 然后逐条积分得到 E_n 及 M_n , 如果不为零, 再用一个有规律的迭代步骤不断修正 λ 及 F_s , 直到式 (9-8) 及式 (9-10) 都得到满足为止。

4. 条间侧向力作用假定函数 $f(x)$

条间力的侧向向力 E 在简化计算条件时, 涉及函数 $f(x)$ 如何选择的问题, 见式 (9-4), 也可以利用弹性理论的解答算出, 也可以在直观假设的基础上指定。根据 Morgenstern 等人的研究, 对于接近圆弧的滑裂面, 安全系数对内力分布的反应是很不灵敏的, 往往取完全不同的 $f(x)$, 得到的安全系数却相当接近。

当然, 用本法求出的条间力也必须符合 9.3 节提到的合理性控制条件 (土条分界面上抗剪条件及不存在拉力的条件), 如果这两个条件得不到满足, 可以通过修改 $f(x)$ 来加以调整。如果取 $f(x)$ 为一常数, 其结果和后面所述的 Spence 法相同, 更特殊一些取 $f(x) = 0$, 则相当于 Bishop 法。可以说, Morgenstern 法、Price 法是对土坡稳定进行极限平衡分析计算的条分法中较为普遍的一般方法。

9.4.2 陈祖煜法

陈祖煜对 Morgenstern 法作了改进, 使之更加结合工程实际。如地震力、坡面载荷等因素的考虑。从土条的静力平衡得到的微分方程出发, 结合相应的边界条件, 推导出下列带有普遍意义的极限平衡方程式。

1. 作用在土条上的力

如图 9-6 所示, 设想某一边坡的滑动土体沿滑裂面 $y = y(x)$ 下滑, 根据安全系数的定义, 土体和滑裂面上的抗剪强度指标均已缩减为 c'_e 、 $\tan \varphi'_e$, 在滑动土体中切出一垂直土条, 分析作用在其上的力, 由图 9-7 可计算得到:

1) 土条重量 ΔW , 浸润线上为天然重度, 浸润线下为饱和重度。

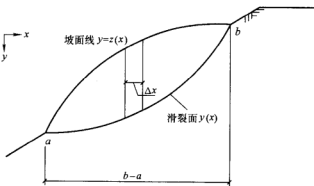


图 9-6 土坡坡面滑裂面示意图

2) 坡表面垂直荷重 $q\Delta x$ 。

3) 水平地震力 $\Delta Q = \eta\Delta W$ ，其作用点与土条底距离为 h_e (图中未标出)。

4) 作用在土条垂直边上的总作用力 G (即土骨架间的法向有效作用力和水压力之和) 与水平线的夹角为 β ，其作用点的纵坐标值为 y_1 。

2. 静力平衡微分方程

如图 9-7 所示，对土条建立 x 和 y 方向的静力平衡方程，即

$$\Delta N \sin \alpha - \Delta T \cos \alpha + \Delta Q - \Delta G \cos \beta = 0$$

$$- \Delta N \cos \alpha - \Delta T \sin \alpha + (\Delta W + q\Delta x) - \Delta G \sin \alpha = 0$$

应用莫尔—库仑条件

$$\Delta T = c'_e \Delta x \sec \alpha + (\Delta N - u \Delta x \sec \alpha) \tan \varphi'_e$$

式中 α ——土条底倾角， $\tan \alpha = dy/dx$ 。

经整理，消去 ΔN ，令 $\Delta x \rightarrow 0$ ，得到静力平衡的微分方程

$$\cos(\varphi'_e - \alpha + \beta) \frac{dG}{dx} - \sin(\varphi'_e - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{dx} G = -p(x) \quad (9-11)$$

$$p(x) = \left(\frac{dW}{dx} + q \right) \sin(\varphi'_e - \alpha) - r_u \frac{dW}{dx} \sec \alpha \sin \varphi'_e +$$

$$c'_e - \sec \alpha \cos \varphi'_e - \eta \frac{dW}{dx} \cos(\varphi'_e - \alpha)$$

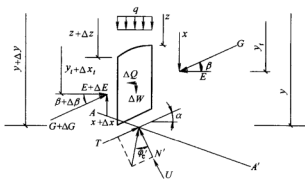


图 9-7 土条作用力和坐标示意图

同时，将作用在土条上的力对土条底中点取矩，建立力矩平衡方程

$$(G + \Delta G) \cos(\beta + \Delta\beta) \left[(y + \Delta y) - (y_1 + \Delta y_1) - \frac{1}{2} \Delta y \right] -$$

$$G \cos \beta (y - y_1 + \frac{1}{2} \Delta y) + G \sin \beta \Delta x - \eta \frac{dW}{dx} h_e = 0$$

h_e 为水平地震力作用点距基底的垂直距离，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，得

$$G \sin \beta = -y \frac{d}{dx} (G \cos \beta) + \frac{d}{dx} (\gamma_1 G \cos \beta) + \frac{dW}{dx} h_e \quad (9-12)$$

式(9-11)也可通过将作用在条块上的力投影图9-7中线 AA' 方向获得。 AA' 与土条底切线方向夹角为 φ'_e 。土条底部的法向力 N' 及由其贡献的切向抗力 $N' \tan \varphi'_e$ 的合力与 AA 垂直,故在土条底部中点的力矩平衡方程中不出现。

3. 静力平衡微分方程的求解

微分方程组式(9-11)和式(9-12)的边界条件是

$$G(a) = 0$$

$$G(b) = 0$$

$$\gamma_1(a) = \gamma(a)$$

$$\gamma_1(b) = \gamma(b)$$

式中 a 和 b ——滑体左、右端点的 x 坐标。见图9-6。

式(9-11)是一个一阶非线性常微分方程,它的积分形式是

$$G(x) = -\sec(\varphi'_e - \alpha + \beta) s^{-1}(x) \left[\int_a^x p(\zeta) d\zeta - G(a) \right] \quad (9-13)$$

$$s(x) = \sec(\varphi'_e - \alpha + \beta) \exp \left[- \int_a^x \tan(\varphi'_e - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta \right] \quad (9-14)$$

式(9-12)的积分形式是

$$\int_a^x G(\sin \beta \tan \alpha) dx = \int_a^x \eta \frac{dW}{dx} h_e dx + [G \cos \beta (\gamma_1 - \gamma)]_a^x \quad (9-15)$$

令 $x = b$,并使用前述边界条件的表达形式,应用分部积分法,式(9-13)和式(9-14)可化为

$$\int_a^b p(x) s(x) dx = 0 \quad (9-16)$$

$$\int_a^b p(x) s(x) t(x) dx - M_e = 0 \quad (9-17)$$

其中

$$t(x) = \int_a^x (\sin \beta - \cos \beta \tan \alpha) \exp \int_a^\zeta \left[\tan(\varphi'_e - \alpha + \beta) \frac{d\beta}{d\zeta} d\zeta \right] d\zeta \quad (9-18)$$

$$M_e = \int_a^b \eta \frac{dW}{dx} h_e dx \quad (9-19)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b G(\sin \beta - \cos \beta \tan \alpha) dx &= - \int_a^b \int_a^\zeta p(\zeta) s(\zeta) d\zeta dx \\ &= - \left[t \int_a^b (\zeta) s(\zeta) d\zeta \right]_a^b + \int_a^b p(x) s(x) t(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) s(x) t(x) dx \end{aligned}$$

上式右侧第一项由式 (9-16) 可知为零。 $p(x)$ 表示土条底部各作用力合力在垂直方向上的分量； φ'_e 表示此方向与土条侧向作用力合力方向的交角；而 $\int p(x)s(x)dx$ 是在土条侧向作用力合力方向上力的平衡； $t(x)$ 则是垂直于土条侧向作用力合力方向的力臂。式 (9-16) 和式 (9-17) 分别反映滑动土体整体的力和力矩的平衡要求。这两个方程中包含一个未知数，即安全系数 F_s ，它隐含在 φ'_e 中和 c'_e 中，另外还包含一个变量 $\beta(x)$ 。假定 $\beta(x)$ 的形式，即可以求出 F_s 。

4. 求解假设条件

如图 9-8 所示， $\beta(x)$ 满足

$$\tan\beta = f_0(x) + \lambda f(x)$$

$f_0(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处为指定值，依据边界条件， $f_0(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处为零。满足该边界条件，可以进一步限制对函数 $\beta(x)$ 所作假设的随意性。 $f(x)$ 一旦确定，稳定分析的求解过程就具体化为求解联立方程式 (9-16) 和式 (9-17) 中的两个未知数 F 和 λ 的问题。显然，求解计算必须采用数值方法通过计算机应用程序设计来实现。限于篇幅，关于 $G(F, \lambda)$ 、 $M(F, \lambda)$ 的数值计算可参考陈祖煜的相关著作。

$f(x)$ 可假定为 1，即假定各土条的 $\beta(x)$ 为一常数；也可假定为其他函数。每一组解都要满足式 (9-20) 和式 (9-21) 的控制条件。

控制条件为：

1) 沿着划分的土条两侧垂直面上的剪应力不超过在这个面上所能发挥的抗剪能力，即

$$F_v = \frac{[E' \tan\varphi'_{av} + c'_{av}(y-z)]}{X} > F \quad (9-20)$$

或

$$F_v = \frac{[E' \tan\varphi'_{ave} + c'_{ave}(y-z)]}{X} > 1 \quad (9-21)$$

式中 F_v ——沿着土条垂直面的安全系数；

E' ——作用在土条垂直的法向有效压力；

X ——作用在土条垂直面的剪力；

$\tan\varphi'_{av}$ ——土条垂直面的有效平均摩擦系数；

c'_{av} ——土条垂直面的有效粘聚力；

$\tan\varphi'_{ave}$ —— $\tan\varphi'_{av}$ 被 F 值除后的值；

c'_{ave} —— c'_{av} 被 F 值除后的值；

F ——垂直面上强度折减后的安全系数；

y ——滑裂面的纵坐标值；

z ——土坡表面的纵坐标值。

2) 为保证在土条接角面上不产生拉力, 作用在土条上的有效力的合力作用点不应落在土条垂直面的外面 (参考图 9-8)

$$0 < A'_c < 1$$

$$A'_c = \frac{y_t - z}{y - z} \quad (9-22)$$

式中 y_i ——作用在土条垂直面上的有效法向力的作用点的纵坐标值。

对式 (9-12) 积分可获得使用式 (9-22) 需知的 y_t 的计算公式

$$y_t = \frac{\int_a^x G(\sin\beta - \cos\beta \tan\alpha) dx - \int_a^x \eta \frac{dw}{dx} h_e dx}{G \cos\beta} + y_a$$

$$\tan\beta = f_0(x) + \lambda f(x)$$

$$f_0(x) = \frac{\tan\delta}{b-a}(x-a) \quad f(x) = \sin \frac{x-a}{b-a} \pi$$

图 9-8 侧向力函数假定

9.4.3 Sarma 法

对滑裂面是任意形状的土坡。Sarma 假想在每一土条重心作用着一个水平地震惯性力 KW_i , 使土条在滑裂面上达到极限状态, 也就是使滑裂面上的稳定安全系数 $F_s = 1$, 此时 K 为临界水平地震加速度, 用 K_c 表示。因此, 在解题时可以不用试算或迭代计算, 使计算工作量大为减轻, 而以 K_c 作为判断土坡稳定程度的 1 个标准。同时, 沙尔玛还在假定沿两相邻土条的垂直分界面, 所有平行于土条底面的斜面均处于极限平衡状态这个前提下, 推导出切向条间力 X 的分布, 从而使超静定问题变成静定的。

1. 土条静力平衡方程

如图 9-9 所示的滑动土体中任取一垂直土条, 其上作用力如图所示, 其中 E 、 N 均是以总应力表示的。 G 点是整个滑动土体的重心, 其坐标为 (x_g, y_g) , 土条底部中点 A (假定 N 、 T 合力作用点与此重合) 的坐标为 (x_i, y_i) 。

取土条垂直方向及水平方向力的平衡, 得

$$N_i \cos\alpha_i + T_i \sin\alpha_i = W_i - (X_{i+1} - X_i)$$

$$T_i \cos \alpha_i - N_i \sin \alpha_i = KW_i - (E_{i+1} - E_i)$$

因为假定 $F_s = 1$, 所以由莫尔-库仑准则可得

$$T_i = c' b_i \sec \alpha_i + (N_i + U_i) \tan \varphi' \quad (9-23)$$

式中 U_i ——作用于土条底部的孔隙应力, 可用下式求出:

$$U_i = r_u W_i \sec \alpha_i$$

在上列各式中消去 T_i 、 N_i , 整理化简, 得

$$(X_{i+1} + X_i) \tan(\varphi'_i - \alpha_i) + (E_{i+1} - E_i) = D_i + KW_i \quad (9-24)$$

其中

$$D_i = W_i \tan(\varphi' - \alpha_i) + (c'_i b_i \cos \varphi'_i) \sec \alpha_i \frac{1}{\cos(\varphi'_i - \alpha_i)} \quad (9-25)$$

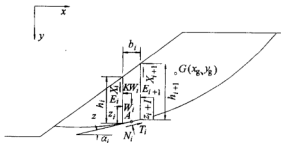


图 9-9 Sarma 法

2. 滑动土体整体条件

考虑到整个土体平衡, $\sum (E_{i+1} + E_i) = 0$, 则

$$\sum (X_{i+1} - X_i) \tan(\varphi'_i + \alpha_i) + \sum KW_i = \sum D_i \quad (9-26)$$

同时, 整个滑动土体还要满足力矩平衡的条件, 现取所有作用力均对滑动土体的重心 G 取力矩, 则 W_i 及 KW 的力矩和为零, 而条间 X 、 E 是滑动土体的内力, 也不产生力矩, 这样就得到

$$\sum (T_i \cos \alpha_i - N_i \sin \alpha_i)(y_i - y_g) + \sum (N_i \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i)(x_i - x_g) = 0$$

利用式 (9-23) ~ 式 (9-25) 在上式中消去 N_i 及 T_i , 得力矩平衡方程为

$$\sum (X_{i+1} - X_i) [(y_i - y_g) \tan(\varphi'_i - \alpha) + (x_i - x_g)] = \sum W_i (x_i - x_g) + \sum D_i (y_i - y_g) \quad (9-27)$$

在式 (9-26)、式 (9-27) 中, 只有地震加速度 K 及条间力 X 是未知的, 如果我们能够找到 X 的表达式同时满足式 (9-27) 及 $\sum (X_{i+1} - X_i) = 0$, 则由式 (9-26) 就可以求出 K , 此时的 K 也就是临界地震加速度 K_c 。为此, Sarma 假定

$$X_{i+1} - X_i = \lambda f(x) \quad (9-28)$$

式中 λ ——常数;

$f(x)$ ——待求的函数, 当然必须满足 $\sum X_i = 0$ 。

将式 (9-28) 代入式 (9-26) 及式 (9-27), 并解此联立方程组, 得

$$\lambda = \frac{S_2}{S_3} \quad K_c = K = (S_1 - \lambda S_4) \times \frac{1}{\sum W_i}$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum D_i \\ S_2 &= \sum W_i(x_i - x_g) + \sum D_i(y_i - y_g) \\ S_3 &= \sum f(x)[(y_i - y_g)\tan(\varphi'_i - \alpha_i) + (x_i - x_g)] \\ S_4 &= \sum f(x)\tan(\varphi'_i - \alpha_i) \end{aligned}$$

当 $(X_{i+1} - X_i)$ 为已知时, 可以由式 (9-24) 求出 $(E_{i+1} - E_i)$, 然后从边界开始逐条推求各土条分界面上的 E_i 及 X_i , 从而求出土条分界面上的抗剪安全系数为

$$F_{ui} = \frac{1}{X_i} [c'_i h_i + (E_i - U_{pi})\tan\varphi'_i] \quad (9-29)$$

式中 U_{pi} ——作用于土条侧面的孔隙水应力;

c'_i 及 $\tan\varphi'_i$ ——土条侧面各土层的平均抗剪强度指标。

E_i 的作用点位置可以取每一土条的作用力对土条底面中心求力矩, 得

$$X_i = \lambda f(x) \left[c'_i h_i + \frac{1}{2} \gamma h_i^2 \tan k'_i (K'_i - r_u) \right] \quad (9-30)$$

其中

$$K'_i = \frac{1 - \sin\beta_i \left[(1 - 2r_u) \sin\varphi'_i + 4c'_i \cos\varphi'_i \times \frac{1}{\gamma h_i} \right]}{1 + \sin\beta_i \sin\varphi'_i}$$

$$\beta_i = 2\alpha_i - \varphi'_i$$

$f(x)$ 是可以任意选择的值, 通常可取 $f(x) = 1$, 如果求出的 $F_{ui} < 1$ 或条间力作用点位置超出三分点, 可以通过修正 $f(x)$ 加以调整。

还有不少学者对土条侧向力的绝对值作假定, 如 Madej (1984) 和 Cerreia (1988) 假定

$$X = \lambda g(x)$$

潘家铮 (1978) 假定

$$X = \lambda \Delta W_i \tan(\beta_m - \alpha)$$

式中 β_m ——边坡的平均坡度。

9.4.4 Janbu 法

1. 静力平衡方程的形式

如图 9-10 所示, 根据安全系数定义有

$$\tau = \frac{\tau_f}{F_s} = \frac{c'_e + \left(q + \frac{\Delta W}{\Delta x} + t - u \right) + \tan\varphi'_e}{1 + \tan\varphi'_e \tan\alpha} \quad (9-31)$$

- 3) 通过式 (9-33) 求得各条块的 ΔE 和 E 。
- 4) 通过式 (9-34) 求得各条块的 X 。
- 5) 在新的 X 的基础上通过式 (9-32) 获得一个新的 $t(x)$ 重复 2) ~ 4), 计算 F_{Σ} 。

6) $F_{\Sigma 1}$ 和 $F_{\Sigma 2}$ 的差值小于允许误差时, 计算收敛结束, 否则在新的 t 和 F_2 基础上重复 2) 至 5) 的解题步骤。

从上述步骤可知, Janbu 法求解力的平衡时, 研究对象是图 9-6 所示的一个土条 (图 9-10), 而使用力矩平衡条件 (即步骤 4) 时, 则是相对一宽度无限小的以土条侧面为中心的另一个土条。

Janbu 法同时引入了力和力矩平衡条件, 计算过程相对比较简单, 可以用手算或编制一个简单的程序来实现。

9.4.5 Spencer 法

1. 条间力作用假设和静力平衡方程

如图 9-11 所示受力土条。Spencer 假定相邻土条之间的法向条间力 E 与切向条间力 X 之间有一固定的常数关系, 即

$$\frac{X_i}{E_i} = \frac{X_{i+1}}{E_{i+1}} = \tan \theta$$

因此, 各条间力合力 P 的方向是相互平行的。如图 9-11 所示, 取垂直土条底部方向力的平衡, 即

$$N_i - (P_i - P_{i+1}) \sin(\alpha_i - \theta) - W_i \cos \alpha_i = 0$$

再取平行土条底部方向力的平衡, 则

$$T_i - (P_i - P_{i+1}) \cos(\alpha_i - \theta) - W_i \sin \alpha_i = 0$$

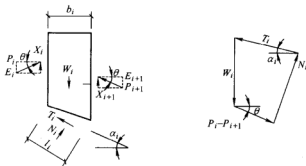


图 9-11 Spencer 法的土条和条间力分析

同时根据安全系数的定义及莫尔—库仑准则, 可得

$$T_i = \frac{c'l_i}{F_s} + [N_i - u_i l_i] \frac{\tan \varphi'}{F_s}$$

又 $l_i = \text{bisecc} \alpha_i$ 。综合上列各式, 可求出土条两侧条间力的合力为

$$P_i - P_{i+1} = \frac{\frac{c'_i b_i}{F_s} \sec \alpha_i + \frac{\tan \varphi'_i}{F_s} (W_i \cos \alpha_i - u_i b_i \sec \alpha_i) - W_i \sin \alpha_i}{\cos(\alpha_i - \theta) \left[1 + \frac{\tan \varphi'_i}{F_s} \tan(\alpha_i - \theta) \right]} \quad (9-36)$$

2. 方程求解条件

对整个滑动土体来说, 为了要维持力的平衡, 必须满足水平和竖直方向的平衡条件

$$\sum (p_i - p_{i+1}) \cos \theta = 0 \text{ 及 } \sum (p_i - p_{i+1}) \sin \theta = 0$$

因为 θ 是个常数, 所以 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 不可能为零。因此, 上列两式实际上是同一个平衡条件, 即

$$\sum (p_i - p_{i+1}) = 0 \quad (9-37)$$

同样, 对整个滑动土体, 还必须满足力矩平衡条件, 即

$$\sum (p_i - p_{i+1}) \cos(\alpha_i - \theta) R = 0 \quad (9-38)$$

式中 R ——各土条底部中点离转动中心的距离, 如果取滑裂面为圆柱面, R 就是圆弧的半径, 而且对所有土条都是常数, 式 (9-38) 可写成

$$\sum (p_i - p_{i+1}) \cos(\alpha_i - \theta) = 0 \quad (9-39)$$

将式 (9-36) 分别代入式 (9-37) 及式 (9-38) 或式 (9-39), 可得到两个方程, 当土坡的几何形状及滑裂面已定, 同时土质指标又已知时, 则只有 θ 及 F_s 两个未知数, 问题因而得解。

9.4.6 不平衡推力法

图 9-12 所示是任意一滑动土条, 其两侧条间力合力的作用方向分别与上一条土条底面相平行, 取垂直与平行土条底面方向力的平衡, 有

$$N_i - W_i \cos \alpha - P_{i-1} \sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i) = 0$$

$$T_i + P_i - W_i \sin \alpha_i - P_{i-1} \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i) = 0$$

应用安全系数的定义及莫尔—库仑准则, 得

$$\tau_i = \frac{c'_i l_i}{F_s} + (N_i - u_i l_i) \frac{\tan \varphi'_i}{F_s}$$

式中 u_i ——作用于土条底面的孔隙应力。

由以上三式消去 T_i 、 N_i , 得

$$P_i = W_i \sin \alpha_i - \left[\frac{c'_i l_i}{F_s} + (W_i \cos \alpha_i - u_i l_i) \frac{\tan \varphi'_i}{F_s} \right] + P_{i-1} \psi_i$$

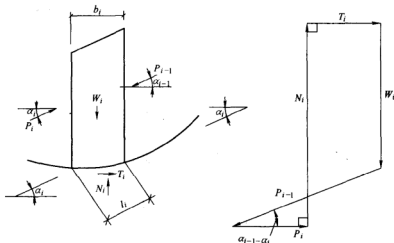


图 9-12 不平衡推力传递法土条受力和条间力分析

式中 ψ_i ——传递系数，以式 (9-40) 表示，即

$$\psi_i = \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i) - \frac{\tan \varphi'_i}{F_s} \sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i) \quad (9-40)$$

在解题时要先假定 F_s ，然后从第一土条开始逐条向下推求，直至求出最后一土条的推力 P_n ， P_n 必须为零，否则要重新假定 F_s 进行试算。

为了使计算工作更加简化，在工程单位中常采用下列简化公式，即

$$P_i = F_s W_i \sin \alpha_i - [c'_i l_i + (W_i \cos \alpha_i - u_i l_i) \tan \varphi'_i] + P_{i-1} \psi_i \quad (9-41)$$

式中，传递系数 ψ_i 改用下式计算，即

$$\psi_i = \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i) - \tan \varphi'_i \sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i)$$

如采用总应力法，在式 (9-41) 中略去 $u_i l_i$ 项， c 、 φ 值可根据土的性质及当地经验，采用试验和滑坡反算相结合的方法来确定。 F_s 值应根据滑坡现状及其对工程的影响等因素确定，一般可取 1.05 ~ 1.25。另外，因为土条之间不能承受拉力，所以任何土条的推力 P_i 如果为负值，则此 P_i 不再向下传递，而对下一条土条取 $P_{i-1} = 0$ 。

各土条分界面上的 P_i 求出之后，就很容易求出此分界面上的抗剪安全系数，即

$$F_{vi} = [c'_i h_i + (P_i \cos \alpha_i - U_{pi}) \tan \varphi'_i] \times \frac{1}{P_i \sin \alpha_i}$$

式中 U_{pi} ——作用于土条侧面的孔隙水应力；

h_i ——土条侧面高；

c'_i 、 $\tan \varphi'_i$ ——采用土条侧面各土层的平均抗剪强度指标。

因为 P_i 的方向是规定的，当 α 比较大时，求出的 F_{vi} 可能小于 1。同时本法

只考虑了力的平衡,对力矩平衡没有考虑,这也是一个缺点。但因为计算简捷,所以常为广大工程技术人员所采用。

9.5 条分法的基本讨论

基于极限平衡理论基础上的条分法计算粘性土坡的安全系数的方法,从建立简单的计算公式到普遍的条分法公式,经历了 80 年的历史,经过众多学者的努力,公式的形式已比较完善。从简化的手工计算形式发展到计算程序设计应用,在工程的应用方面应该说作出了很大的贡献。然而,就一具体工程土坡来说,一方面不同的方法与公式却得到不同的计算安全系数,有时还有较大的差别。另一方面,即使得到的安全系数大于 1 或更大,这在理论上坡体是处于稳定状态,而工程实际中有时仍出现滑坡。这里主要的原因有:假定土体是理性塑性材料,土条是理想的刚体,各种方法最大的差别是对条间力不同的假设形式,以满足极限平衡的静力方程,使问题得以求解;再者,抗剪强度参数采用的是特定条件下静态数值,既未考虑动态影响,也未考虑强度非线性,这与工程实际的环境状态有一定的差别。虽然人们付出了很大的努力,但对坡体的安全性准确判断还是与实际有一定的差距。

影响粘性土坡的稳定分析除了在分析方法上存在差别和土的强度指标的变异及测试条件之外,坡体的应力历时和强度的变化、自然环境、工程环境和水环境的影响也是特别重要的方面,因而土坡的安全性是动态变化的过程。滑坡的形成总是从稳定状态、小变形的渐变进程而逐渐发展到大变形。从工程应用出发,除了加强稳定分析方法的研究,更为重要的是应加强稳定状态的保护和滑坡治理技术的应用研究。

近年来,应用有限元方法分析土坡有了很大的发展,但确定坡体的破坏标准和衡量坡体的安全程度还不成熟,面临着激烈的挑战。另外,反分析法、模糊数学方法、破坏概率和可靠度分析方法的运用,愈来愈受到重视并得到了发展,我们期待着突破性的成果出现。

参 考 文 献

- 1 钱家欢,殷宗泽主编.土工原理与计算.第 2 版.北京:中国水利水电出版社,1996
- 2 龚晓南.高等土力学.杭州:浙江大学出版社,1996
- 3 陈祖煜.土质边坡稳定分析:原理·方法·程序.北京:中国水利水电出版社,2003
- 4 龚晓南.土工计算机分析.北京:中国建筑工业出版社,2000
- 5 王国体.应力重塑方法及其工程应用.岩土工程学报,2003,25(6)
- 6 王国体.高填土公路边坡的稳定性分析.岩土工程学报,1994,16(1)
- 7 王国体.地基基础的计算与程序.合肥:中国科学技术大学出版社,1991

第 10 章 地基极限承载力计算

10.1 土体的极限平衡理论概述

极限平衡理论以刚塑性体模型为基础,刚塑性体的一部分或全部在荷载作用下从静力平衡转向运动的临界状态称为极限平衡态,相应的荷载称为极限荷载。

土体的极限平衡理论是 20 世纪 50 年代初 Drucker 和 Shield 等人把静力场和运动场结合起来并提出极值原理以后才建立的。但在此以前,极限平衡理论的个别原理和方法已在土力学中广泛应用,例如 Coulomb 土压力理论和土坡圆弧稳定分析方法是运动场理论的应用;Rankine 土压力理论和某些地基极限承载力公式则是静力场理论的应用。

土体的极限平衡理论是研究土体处于理想塑性状态时的应力分布和滑裂面轨迹的理论。在理想弹塑性土体模型中,当土体中的应力小于屈服应力时,应力和变形用弹性理论求解,这时土体中每一点都应满足静力平衡条件和变形协调条件。当土体处于塑性状态时,不再保持其连续性,不能满足变形协调条件,但应满足极限平衡条件。极限平衡理论就是根据静力平衡条件和极限平衡条件所建立起来的理论。

在平面应变(图 10-1)条件下,极限平衡问题的基本方程式由以下几部分组成:

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = X \quad (10-1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = Z \quad (10-1b)$$

式中 X 和 Z ——体积力分量。

屈服条件:

$$f = \tau_m - \sigma \sin \varphi = 0 \quad (10-2)$$

几何方程

$$\dot{\epsilon}_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \dot{\epsilon}_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \dot{\gamma}_{xz} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \quad (10-3)$$

正交流动法则

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \dot{\gamma}_m, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \dot{\gamma}_m, \quad \dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \dot{\gamma}_m \quad (10-4)$$

其中

$$\dot{\gamma}_m = \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2} \quad (10-5a)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + c \cot \varphi \quad (10-5b)$$

$$\tau_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_z)^2 - \tau_{xz}^2} \quad (10-5c)$$

土体中塑性区内任一点的应力分量也可以用两个变量 σ 及 θ 确定, 其中 θ 为大主应力方向角。利用图 10-2 可以求出应力分量的如下表达式

$$\sigma_x = \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \quad (10-6a)$$

$$\sigma_z = \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \quad (10-6b)$$

$$\tau_{xz} = \sigma \sin \varphi \sin 2\theta \quad (10-6c)$$

将式 (10-6) 代入平衡方程式 (10-1), 经简化后可得

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \tan (\theta + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial z} = a \quad (10-7a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \tan (\theta - \mu) \frac{\partial \xi}{\partial z} = b \quad (10-7b)$$

其中

$$\xi = \frac{1}{2} c \tan \varphi \ln \frac{\sigma}{c} + \theta \quad (10-8a)$$

$$\eta = \frac{1}{2} c \tan \varphi \ln \frac{\sigma}{c} - \theta \quad (10-8b)$$

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (10-8c)$$

$$\frac{a}{b} = \mp \frac{X \sin (\theta \mp \mu) - Z \cos (\theta \mp \mu)}{2 \sigma \sin \varphi \cos (\theta \pm \mu)} \quad (10-8d)$$

式 (10-7) 为双曲线型偏微分方程, 具有两组相交的特征线, 可用特征线法求数值

解, 两组特征线的斜率为 $dz/dx = \tan (\theta \pm \mu)$, 因此, 式 (10-7) 可该写为

$$S_1: \quad \frac{dz}{dx} = \tan (\theta + \mu) \quad \frac{d\xi}{dx} = a \quad (10-9a)$$

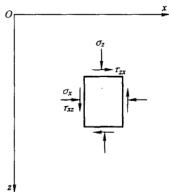


图 10-1 平面问题土中一点的状态

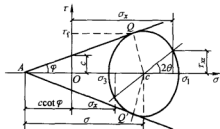


图 10-2 极限莫尔应力圆

$$S_2: \quad \frac{dz}{dx} = \tan(\theta - \mu) \quad \frac{d\eta}{dx} = b \quad (10-9b)$$

特征线方向与大主应力方向的夹角为 $\pm \mu$ ，即与滑动面方向重合，故物理意义上滑动（移）线就是特征线（图 10-3）。

由式 (10-2) 求出 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}$, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}$ 后代入式 (10-3) 和式 (10-4) 可得

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\dot{\gamma}_m}{2\sigma \sin \varphi} \left(-\sigma \sin^2 \varphi + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right) \quad (10-10a)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\dot{\gamma}_m}{2\sigma \sin \varphi} \left(-\sigma \sin^2 \varphi + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right) \quad (10-10b)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\dot{\gamma}_m}{\sigma \sin \varphi} \tau_{xz} \quad (10-10c)$$

式 (10-10) 中消去 $\dot{\gamma}_m$ ，并以沿滑动线方向的分速度 v_1 和 v_2 作为新的变量代替 v_x 和 v_z ，即

$$v_1 = v_x \cos(\theta - \mu) + v_z \sin(\theta - \mu) \quad (10-11a)$$

$$v_2 = v_x \cos(\theta + \mu) + v_z \sin(\theta + \mu) \quad (10-11b)$$

则式 (10-10) 可以简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial v_2}{\partial z} - v_2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \tan \varphi + \\ v_1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \sec \varphi = 0 \end{aligned} \quad (10-12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial v_1}{\partial z} + v_1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \tan \varphi + \\ v_2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \sec \varphi = 0 \end{aligned} \quad (10-12b)$$

方程式 (10-12) 也属于双曲线型，且其特征线与静力平衡方程式 (10-7) 的特征线重合，特征线方程式为

$$S_1: \quad \frac{dz}{dx} = \tan(\theta + \mu) \quad \frac{dv_2}{d\theta} = v_2 \tan \varphi - v_1 \sec \varphi \quad (10-13a)$$

$$S_2: \quad \frac{dz}{dx} = \tan(\theta - \mu) \quad \frac{dv_1}{d\theta} = -v_1 \tan \varphi + v_2 \sec \varphi \quad (10-13b)$$

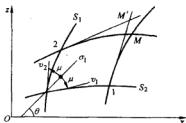


图 10-3 特征线

10.2 均质地基极限承载力计算

10.2.1 地基承载力的概念

地基承载力是指地基土单位面积上承受荷载的能力。确定地基承载力是工程实践中迫切需要解决的基本问题之一，也是土力学研究的主要课题。目前，确定地基承载力的方法主要有载荷试验法或其他原位测试法、理论公式法。

地基承载力理论是根据土的强度理论—极限平衡理论而建立的。依据塑性变形区（即极限平衡区）发展的不同阶段，提出了临塑荷载、临界荷载和极限荷载的概念，并建立相应的计算公式。本章将主要讨论地基极限承载力的理论分析方法、计算公式和影响因素。

当基础底面以下的地基土中将要出现而尚未出现塑性变形区时，地基所能承受的最大荷载称为临塑荷载；当地基土中的塑性变形发展到某一阶段，即塑性区达到某一深度，通常为相当于基础宽度的 $1/3$ 或 $1/4$ 时，地基土所能承受的最大荷载称为临界荷载；当地基土中的塑性变形区充分发展并形成连续贯通的滑动面时，地基土所能承受的最大荷载称为极限荷载。

利用静载荷试验的 $p-s$ 曲线可以直观地说明上述概念。现场静载荷试验装置如图 10-4 所示，试验结果可以绘制成图 10-5 所示的 $p-s$ 曲线。典型的 $p-s$ 曲线可以分成三个阶段：

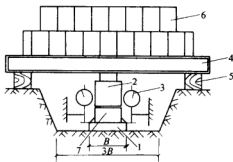


图 10-4 载荷试验

- 1—承压板 2—千斤顶 3—百分表
4—钢梁 5—枕木垛 6—荷载 7—支柱

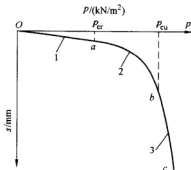


图 10-5 载荷试验 $p-s$ 曲线

- 1—地基土压密阶段 2—塑性变形阶段
3—破坏阶段

第一阶段：压密变形阶段（ oa 段）。承压板上的荷载比较小，荷载与沉降成直线关系，对应于直线段终点 a 的荷载为临塑荷载 p_{cr} 。

第二阶段：塑性变形阶段（ ab 段）。承压板上的荷载逐渐增大，地基的变形

与荷载之间不再成直线关系,说明地基土除发生竖向压缩外,局部发生剪切破坏,因而呈现塑性状态,对应于 b 点的荷载即为极限荷载 p_{cu} ; 临界荷载为塑性变形阶段 ab 段中某一点相对应的荷载。

第三阶段:破坏阶段 (bc 段)。在这一阶段,塑性区已发展到连成一片,地基中形成连续的滑动面,只要荷载稍有增加,沉降就急剧增加,地基土发生侧向挤出,承压板周围地面大量隆起,最终发生整体破坏。

因此,地基极限承载力是指地基内部整体达到极限平衡时的荷载,即极限荷载。在静载荷试验的 $p-s$ 曲上表现为沉降急剧增大或很长时间不停止。将地基极限承载力除以安全系数,可以作为地基的承载力特征值,但这是由强度方面考虑的,至于是否满足地基的变形要求,则需另行验算。目前,求解极限荷载的途径有:一类是根据极限平衡条件建立微分方程,根据边界条件求出地基整体达到极限平衡时各点的精确解。此法在理论上比较严密,但运算过程甚繁。另一类为假定滑动面法,通过基础模型试验的实际滑动面形状,简化为假定的滑动面,然后按假定滑动面上的极限平衡条件求解。由于不同研究者进行简化的方法不同或假定滑动面的形状不同,这样的半经验公式有很多。

试验研究表明,地基在极限荷载作用下发生剪切破坏的形式可分为整体剪切破坏、局部剪切破坏和冲剪破坏三种(图 10-6)。

整体剪切破坏(图 10-6b):其特征是在地基土中形成连续的滑动面,土从基础两侧挤出隆起,基础发生急剧下沉并侧倾而破坏。沉降与荷载的关系开始呈线性变化,当濒临破坏时出现明显的拐点,见图 10-6a 中 a 型 $p-s$ 曲线。

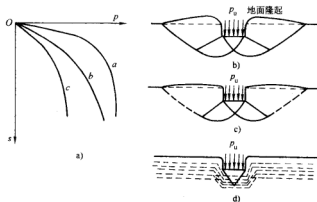


图 10-6 竖直荷载下地基的破坏形式

a) 典型 $p-s$ 曲线 b) 整体剪切破坏 c) 局部剪切破坏 d) 冲剪破坏

局部剪切破坏(图 10-6c):其特征是地基土中剪切破坏区域只发生在基础下的局部范围内,并不形成延伸到地面的连续滑动面,基础四周地面虽有隆起迹

象,但不为出现明显的倾斜或倒塌。沉降与荷载的关系一开始就呈非线性变化,且无明显的拐点,见图 10-6a 中 *b* 型 $p-s$ 曲线。

冲剪破坏(图 10-6d):其特征是在地基土中不出现明显的连续滑动面,而在基础四周土体发生竖向剪切破坏,使基础连续刺入土中。荷载与沉降的关系呈非线性变化,也无明显的拐点,见图 10-6a 中的 *c* 型 $p-s$ 曲线。

地基剪切破坏的形式与土的性质、基础上施加荷载的情况及基础的埋置深度等多种因素有关。一般地,硬粘土或紧密的砂土地基常发生整体剪切破坏;松软土地基常发生冲剪破坏;而中等密实的砂土地基常发生局部剪切破坏。按假定滑动面法得到的地基极限承载力半经验公式都是在整体剪切破坏条件下得到的。对于局部剪切破坏或冲剪破坏的情况,目前尚无理论公式可循。有些学者建议将整体剪切破坏的计算公式加以适当修正,即可用于局部剪切破坏或冲剪破坏的计算。

10.2.2 普朗特课题

1920 年普朗特(Prandtl L.)根据塑性平衡的观点,研究了刚性体压入较软的、均匀的、各向同性材料的过程,假定地基土的重力为零,导出了下式

$$q_u = \frac{c}{\tan \varphi} \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} - 1 \right] = c \cdot \cot \varphi \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) e^{\pi \tan \varphi} - 1 \quad (10-14)$$

式中 q_u ——极限压应力;

φ ——材料的内摩擦角;

c ——材料的粘聚力。

人们把他的解应用到地基承载力的课题上。考虑宽度为 B 、无摩擦的条形承压板,压入土体中,如图 10-7 所示。假定承压板底面与土之间是光滑的,因此,土楔 ABC 中主应力的方向是竖直的,滑动面 AC 与承压板底面成 $\pi/4 + \varphi/2$ 角,即 $\triangle ABC$ 是 Rankine 的主动状态区, $\angle ACB = 2\alpha$ 。由于土楔 ABC 向下位移,把附近的土挤向两侧,因此土楔 ADF 和 BEG 成为 Rankine 的被动状态区。 $\angle DFA$ 与 $\angle EGB$ 都等于 $\pi/4 - \varphi/2$ 。主动土楔与被动土楔之间的过渡区 ACD 与 BCE 是辐射向剪切区, CD 和 CE 面是对数螺线 $r = r_0 \exp(\theta \tan \varphi)$, 这里, $r_0 = B/2 \cdot \csc \alpha$; 而主动与被动土楔的破坏面与对数螺线相切。因此, $GECD$ 面以上的土体处于塑性状态,而其余部位的土体则处于弹性平衡状态。

根据普朗特的假定条件,式(10-14)适用于具有 c 、 φ 的土体上的条形基础。可是,由式(10-14)可知,当 $c=0$ 时 $q_u=0$ 。这个结果与实际试验结果不符合。这是由于在推导公式时,假定了承压板下土的重度等于零而引起的;其次,当地基土的内摩擦角 $\varphi=0$ 时,得出 q_u 为不定形式。因此,要用数学中的罗比塔(L'Hopital)法则,于是有

$$\lim_{p \rightarrow 0} q_u = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{c \cdot \frac{d}{d\varphi} \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} - 1 \right]}{\frac{d}{d\varphi} \tan \varphi} = (\pi + 2) c = 5.14c \quad (10-15)$$

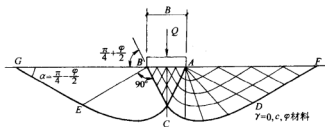


图 10-7 普朗特课题

赖斯诺 (Reissner H., 1924) 在普朗特的基础上, 把基础两侧埋置深度内的土重以连续均布的超载 $q = \gamma_0 D$ 来代替, 得到基础有埋深时地基极限承载力的表达式为

$$q_u = \gamma_0 D N_q + c N_c \quad (10-16a)$$

$$N_q = \exp(\pi \tan \varphi) \tan^2(45^\circ + \varphi/2) \quad (10-16b)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi \quad (10-16c)$$

式中 γ_0 ——基础两侧土的加权重度;

D ——基础的埋置深度;

N_q 、 N_c ——地基极限承载力系数, 它们是土的内摩擦角 φ 的函数。

式 (10-14) 和式 (10-16) 表明, 当基础置于无粘性土 ($c=0$) 的表面 ($D=0$) 时, 地基极限承载力将等于零; 另外, 地基极限承载力与条形基础的宽度 B 无关, 这显然是不合理的。为了弥补这一缺陷, 许多学者在普朗特的基础上作了修正和发展, 使极限承载力公式逐步得到完善。例如, 20 世纪 40 年代, 太沙基 (Terzaghi K.) 根据普朗特的基本原理, 提出了考虑土重量的地基极限承载力公式; 20 世纪 50 年代梅耶霍夫 (Meyerhof) 提出了考虑基底以上两侧土体抗剪强度影响的地基极限承载力计算公式。下面分别予以介绍。

10.2.3 太沙基课题

太沙基 (K. Terzaghi) 将浅基础定义为埋深不大于宽度的基础。在推导均质地基上的条形基础受中心荷载作用下的极限承载力时, 太沙基把土作为有重力的介质, 并作了如下一些假设:

- 1) 基础底面粗糙。基础底面与土之间有摩擦力存在, 当地基发生整体剪切

破坏并形成延伸至基底平面处的连续滑动面时，基底以下有一部分土体将随着基础一起移动而始终处于弹性平衡状态，该部分土体称为弹性楔体。弹性楔体的边界 ab 或 a_1b 为滑动边界的一部分并假定与水平面的夹角为 ψ ，如图 10-8a 所示。

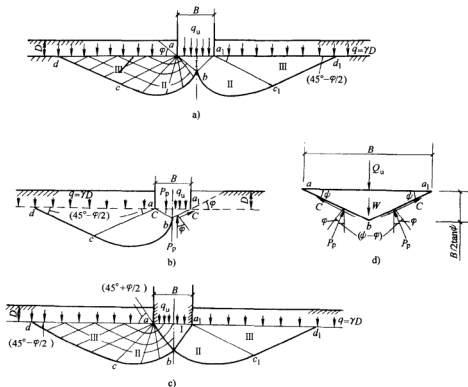


图 10-8 太沙基 (K.Terzaghi) 极限承载力课题

a) 粗糙基底 b) 完全粗糙基底 c) 完全光滑基底 d) 弹性楔体受力分析

2) 基土是有重力的 ($\gamma \neq 0$)，但忽略地基土重力对滑移线形状的影响。因为，根据极限平衡理论，如果考虑土的重度，塑性区内的两组滑移线形状就不一定是直线。因此，II 区是径向剪切区，滑移线 bc 或 bc_1 为对数螺旋曲线；III 区是朗肯 (Rankine) 被动状态区， cd 或 c_1d_1 部分为直线，与水平面成 $\pi/4 - \varphi/2$ 角，如图 10-8a 所示。

3) 不考虑基底以上基础两侧土体抗剪强度的影响，而用当量均布超载 $q = \gamma_0 D$ 来代替。

根据上述假定，由图 10-8d 中的弹性楔体 $abaa_1$ 的平衡条件，可以得到整体剪切破坏时的地基极限承载力公式 q_u

$$q_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2} \gamma BN_\gamma \quad (10-17)$$

其中

$$N_c = \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi \sin \varphi} \left\{ \exp \left[\left(\frac{3}{2} \pi + \varphi - 2\psi \right) \tan \varphi \right] (1 + \sin \varphi) - 1 \right\} \quad (10-18a)$$

$$N_q = \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} \exp \left[\left(\frac{3}{2} \pi + \varphi - 2\psi \right) \tan \varphi \right] \tan(45^\circ + \varphi/2) \quad (10-18b)$$

$$N_\gamma = \frac{1}{2} \tan \psi \left(\frac{k_{py} \cos(\psi - \varphi)}{\cos \varphi \cos \psi} - 1 \right) \quad (10-18c)$$

式中 N_γ 、 N_q 、 N_c ——承载力系数，其中，弹性楔体的边界 ab 或 a_1b 与水平面的夹角 ψ 为未定值。

为此，太沙基对下述两种情况作出了解答：

1) 假定基底完全粗糙。此时，可假设弹性楔体的边界 ab 或 a_1b 与水平面的夹角 $\psi = \varphi$ ，如图 10-8b 所示。于是，式 (10-18) 可改写为

$$N_q = \frac{\exp \left[(3\pi/2 - \varphi) \tan \varphi \right]}{2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (10-19a)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi \quad (10-19b)$$

$$N_\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{py}}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) \tan \varphi \quad (10-19c)$$

式 (10-19c) 中仅考虑土的重力贡献，对被动土压力系数 k_{py} 值需通过试算确定。

2) 假定基底完全光滑。此时，弹性楔体不再存在而成为朗肯主动区，整个滑动区域已演变成与普朗特情况完全相同，与水平面的夹角 $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ ，如图 10-8c 所示，将 $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ 代入式 (10-18)，则基底完全光滑时的承载力系数 N_q 、 N_c 的表达式与普朗特课题的式 (10-16) 完全相同。对于式 (10-19) 中的承载力系数 N_γ ，1967 年太沙基和派克 (Peck) 建议按下列半经验公式表示，即

$$N_\gamma = 1.8 (N_q - 1) \tan \varphi \quad (10-20)$$

沈珠江 (2000) 则认为，太沙基和派克 (1967) 建议的用于基底完全光滑情况，即式 (10-20) 用于基底完全粗糙的情况倒比较合适，而对于基底完全光滑的情况，可近似地按下式计算

$$N_\gamma = (N_q - 1) \sin \varphi \quad (10-21)$$

10.2.4 梅耶霍夫课题

梅耶霍夫 (Meyerhoff, 1951) 认为太沙基理论一方面忽略了覆土的抗剪强度，

另一方面滑动面被假定与基础底面水平线相交为止, 没有伸延到地表面上去, 这是不符合实际的。为了克服这些局限性, 梅耶霍夫提出应该考虑到地基土的塑性平衡区随着基础的埋深不同而扩展到最大可能的程度, 并且应计及基础两侧土的抗剪强度对承载力的影响。但是, 这个课题存在数学上的困难而无法得到严格的解答, 最后, 他用简化的方法导出条形基础受中心荷载作用时均质地基的极限承载力公式。梅耶霍夫公式既可用于浅基础, 也可用于深基础, 是目前西欧各国常用的公式之一。

BE 面可以看成是最大主应力面, 因此, 滑动面 BC 与最大主应力面成 $45^\circ + \varphi/2$ 。由图 10-9 可以看出两组滑动面的形状。对于浅基础, 滑动面 $ACDE$ 交于地表面点 E ; 对于深基础, 则滑动面 $ACDE$ 交于基础的侧面, 其中 CD 为对数螺线。对于浅基础, 作用在基础侧面 BF 上的合力及附近土块 BEF 的重力 W , 可由平面 BE 上的等代应力 σ_0 、 τ_0 来代替, 如图 10-10a 所示。于是, 平面 BE 可看作是“等代自由面”, 这个面与水平面所成的角度为 β , 角度 β 随基础的埋深而增加。因此, σ_0 、 τ_0 、 β 可看作是随基础埋深有关的参数。等代应力 σ_0 、 τ_0 按下式计算

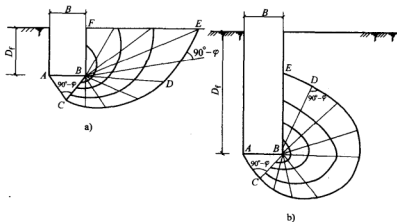


图 10-9 梅耶霍夫课题

a) 浅基础 b) 深基础

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \gamma D_f \left(K_0 \sin^2 \beta + \frac{K_0}{2} \tan \delta \sin 2\beta + \cos^2 \beta \right) \quad (10-22)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \gamma D_f \left[\frac{1 - K_0}{2} \sin 2\beta + K_0 \tan \delta \sin^2 \beta \right] \quad (10-23)$$

式中 K_0 ——静止土压力系数;

δ ——土与基础侧面之间的外摩擦角。

梅耶霍夫推导得到的均质地基极限承载力公式与太沙基的公式具有相似形

式如下

$$q_u = cN_c + \sigma_0 N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (10-24)$$

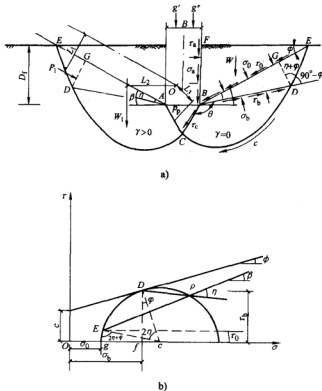


图 10-10 梅耶霍夫课题的推导

其中

$$N_q = \frac{(1 + \sin \varphi) \exp(2\theta \tan \varphi)}{1 - \sin \varphi \sin(2\eta + \varphi)} \quad (10-25a)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi \quad (10-25b)$$

$$N_\gamma = \frac{4P_p \sin(45^\circ + \varphi/2)}{\gamma B^2} - \frac{1}{2} \tan(45^\circ + \varphi/2) \quad (10-25c)$$

式中 N_γ 、 N_q 、 N_c ——梅耶霍夫承载力系数；

β ——“等代自由面”与水平面所成的夹角；

θ ——对数螺线的中心角，满足下列关系；

$$\theta = 3\pi/4 + \beta - \eta - \varphi/2 \quad (10-26)$$

η ——图 10-10a 中对数螺线 CD 上的 D 点与 A 点的连线 AD 与

“等代自由面” AE 的夹角, 可根据等代应力 σ_0 和 τ_0 , 由莫尔圆 (图 10-10b) 求得;

P_p ——作用在 AC 面上的被动土压力, 作用点离点 A 的距离为 $2\sqrt{3}AC$ 。

由于被动土压力 P_p 是在任意假定的对数螺线中心及相应滑动面的情况下得到的, 为了求得最危险的滑动面及其相应的被动土压力最小值, 必须假定多个对数螺线中心及对相应滑动面进行试算。

由对数螺线的性质和图 10-10a 中 ADE 的几何关系, 可得到 η 与 β 、 θ 、 φ 、 D_t 、 B 之间的关系如下:

$$D_t = \frac{\sin\beta \cos\varphi \exp(\theta \tan\varphi)}{2\sin(45^\circ - \varphi/2) \cos(\eta + \varphi)} B \quad (10-27)$$

这样, 可先假定一个“等代自由面”并确定相应的 β , 计算等代应力 σ_0 和 τ_0 , 由此而求得 η 值, 再根据式 (10-26) 和式 (10-27) 验证 β 值, 直至假定值与反算值两者相符为止。

如果“等代自由面” BE 面的抗剪强度动用系数为 F_s , $0 \leq F_s \leq 1.0$, 则 BE 面上的 σ_0 和 τ_0 的关系为

$$\tau_0 = F_s(c + \sigma_0 \tan\varphi) \quad (10-28)$$

由于 BD 面处于极限平衡状态, 因此, 法向应力 σ_b 和切向应力 τ_b 的关系为

$$\tau_b = c + \sigma_b \tan\varphi \quad (10-29)$$

由图 10-10b 中的几何关系, 可得

$$\sigma_b = \sigma_0 + \frac{\tau_b}{\cos\varphi} [\sin(2\eta + \varphi) - \sin\varphi] \quad (10-30)$$

由式 (10-29) 和式 (10-30) 可得

$$\sigma_b = \frac{\sigma_0 + \frac{c}{\cos\varphi} [\sin(2\eta + \varphi) - \sin\varphi]}{1 - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} [\sin(2\eta + \varphi) - \sin\varphi]} \quad (10-31)$$

由图 10-10b 中的几何关系, 可以得到角度 η 与抗剪强度动用系数 F_s 的关系为

$$\cos(2\eta + \varphi) = \frac{\tau_0}{\tau_b / \cos\varphi} = \frac{F_s(c + \sigma_0 \tan\varphi) \cos\varphi}{c + \sigma_b \tan\varphi} \quad (10-32)$$

可见, 若 $F_s = 0$, 即“等代自由面” BE 上的切向应力 $\tau_0 = 0$, 该面上的抗剪强度没有被动用, 则有 $\cos(2\eta + \varphi) = 0$, 因此, $\eta = \pi/4 - \varphi/2$, 以及 $\theta = \pi/2 + \beta$; 若 $F_s = 1$, 即“等代自由面” BE 上的抗剪强度全部被动用, 则有 $\cos(2\eta + \varphi) = \cos\varphi$, 因此, $\eta = 0$, 以及 $\theta = 3\pi/4 + \beta - \varphi/2$ 。因此, 承载力系数 N_γ 、 N_q 、 N_c 是与 φ 、 β 和 F_s 有关的函数, 其关系示于图 10-11 中, 可供查用。

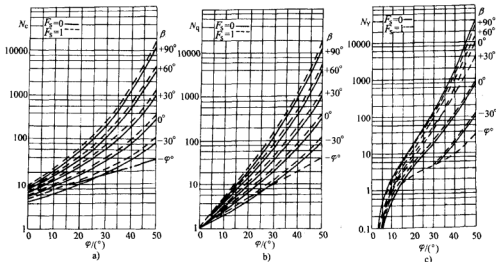


图 10-11 梅耶霍夫承载力系数 N_γ 、 N_q 、 N_c 与 φ 、 β 和 F_s 的关系曲线

此外，在图 10-10a 中，若 $F_s = 0$ 和 $\beta = 0$ ，意味着 BE 线变成水平线，这时应有 $\sigma_0 = \gamma D_f$ ， $\tau_0 = 0$ ，图 10-10b 中的 E 点落到水平轴上， $2\eta + \varphi = \pi/2$ ，相应的 $\theta = \pi/2$ ，则式 (10-25a) 的表达式与式 (10-16b) 完全相同，即普朗特课题是梅耶霍夫课题的特例；而承载力系数 N_γ ，梅耶霍夫建议按下式计算

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan 1.4\varphi \quad (10-33)$$

如果基础埋置在距地表 FE 下深度 D_f 处，如图 10-10a 所示，则还要考虑基础侧面与地基土之间的摩擦力 τ_a 对地基极限承载力的贡献。因此，均质地基极限承载力梅耶霍夫公式的最终形式为

$$q_u = cN_c + \sigma_0 N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + 2\tau_a D_f / B \quad (10-34)$$

其中

$$\tau_a = \sigma_a \tan \delta = \frac{1}{2} K_0 \gamma D_f \tan \delta \quad (10-35)$$

式中 σ_a ——作用在 BE 面上的压力，其大小等于静止土压力。

对于图 10-9b 所示的深基础情况，对数螺线 CDE 的起始向径 BC 为

$$\overline{BC} = \frac{B}{2 \sin(\pi/4 - \varphi/2)}$$

$\angle CBE$ 为

$$\theta = \frac{3}{2} \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{5\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (10-36)$$

因此有：

$$\overline{BE} = \overline{BC} \exp(\theta \tan \varphi) = \frac{B}{2 \sin(\pi/4 - \varphi/2)} \exp\left[\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \tan \varphi\right] \quad (10-37)$$

令 $\overline{BE} = D_{\min}$ ，并计算 D_{\min}/B 之值，如表10-1所示。

表 10-1 D_{\min}/B 之值

φ ($^{\circ}$)	0	10	20	30	40	45
D_{\min}/B	0.707	1.53	3.42	8.35	23.8	44.4

D_{\min} 的意义是：如果基础的埋置深度（图 10-9b）

$$D_f \geq D_{\min} = \overline{BE} \quad (10-38)$$

时，就可以作为“深基础”来考虑了。从表 10-1 可以看出， D_{\min}/B 是随着土的内摩擦角 φ 而增加的。

为了推导深基础的地基极限承载力公式，可比较一下图 10-9b 与图 10-10a。在图 10-10a 中，令 $\beta = \pi/2$ ， $\eta = 0$ ，即得 $\theta = 5\pi/4 - \varphi/2$ 。这与上述情况完全符合，这就是说，对数螺线的向径 BD 与 BE 重合，且与基础的侧面 BF 重合。这时，由式 (10-25a)，梅耶霍夫承载力系数 N_q 可以改写为

$$N_q = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \exp\left[\left(\frac{5\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi\right] \quad (10-39)$$

而根据式 (10-22)，当 $\beta = \pi/2$ 时，等代应力 σ_0 为

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \gamma D_f K_0 = \sigma_a \quad (10-40)$$

也即，此时等代应力 σ_0 就是作用在基础侧面的压力 σ_a 。

10.2.5 基础形状对地基极限承载力的影响

以上所讨论的公式都是针对条形基础的情况即平面课题而言的，对于圆形和矩形基础的求解数学上有着很大的困难。不同的研究者提出了一些半经验公式。大多数研究者是对条形基础的承载力系数 N_c 、 N_q 和 N_γ 分别乘以形状因数 λ_c 、 λ_q 和 λ_γ 。表 10-2 给出了一些研究者建议的形状因数 λ_c 、 λ_q 和 λ_γ 的表达式。

表 10-2 形状因数 λ_c 、 λ_q 和 λ_γ

研究者和适用条件		形状因数		
		λ_c	λ_q	λ_γ
太沙基 和波克	方形基础	1.2	1.0	0.8
	圆形基础	1.2	1.0	0.6
	矩形基础	1.2	1.0	$1 - 0.2B/L$

(续)

研究者和适用条件		形状因数		
		λ_c	λ_q	λ_γ
梅耶霍夫	$\varphi = 0$	$1 + 0.2B/L$	1.0	1.0
	$\varphi \geq 10^\circ$	$1 + 0.2(B/L) \tan(45^\circ + \varphi/2)$	$1 + 0.1(B/L) \tan(45^\circ + \varphi/2)$	$1 + 0.1(B/L) \tan(45^\circ + \varphi/2)$
汉森(Hansen J.B.)		$1 + 0.2B/L$	$1 + (B/L) \sin \varphi$	$1 - 0.4B/L \geq 0.6$
魏西克(Vesic A.S.)		$1 + (B/L)(N_q/N_c)$	$1 + (B/L) \tan \varphi$	$1 - 0.4B/L$

注: B 为基础宽度; L 为基础长度, $B \leq L$ 。

应指出: 当采用汉森(Hansen)和魏西克(Vesic)的形状因数 λ_c 、 λ_q 和 λ_γ 时, 汉森和魏西克的地基极限承载力公式与太沙基的公式相同, 但承载力系数 N_c 、 N_q 与普朗特的公式相同; 而承载力系数 N_γ , 对汉森公式采用

$$N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \varphi \quad (10-41)$$

对魏西克公式采用

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \varphi \quad (10-42)$$

对于不排水条件下的饱和软土 ($\varphi = 0$), 斯肯普顿(Skemp-ton)建议条形基础的地基极限承载力按下列式计算

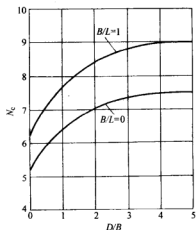
$$q_u = c_u N_c + \gamma D_f \quad (10-43)$$

式中 c_u ——饱和软土的不排水剪强度;

N_c ——承载力系数, 按图 10-12 确定。图 10-12 斯肯普顿建议的地基承载力系数 N_c 。

对于宽度为 B 、长度为 L 的矩形基础, 取形状因数 $\lambda_c = 0.84 + 0.16B/L$ 。

($\varphi = 0$ 的饱和软土)



10.2.6 地基破坏形式对地基极限承载力的影响

前述地基极限承载力公式都是在地基发生整体剪切破坏情况下得到的, 即假定土是刚塑性体, 剪切破坏前不产生压缩。实际上, 多数情况下土在剪切破坏过程中会产生可观的压缩, 甚至导致局部剪切破坏或冲剪破坏。

地基破坏形式的出现与基础上所加的荷载条件、基础的埋置深度、土的类别和密度等因素有关。在一定的条件下, 主要取决于土的相对压缩性。魏西克主要考虑到土的压缩性, 建议用地基土的刚度指标 I_r 与地基土的临界刚度指标 I_{cr} 进行比较, 将土划分为相对不可压缩和相对可压缩的两大类型, 并据此来判别地基的破坏形式。若 $I_r > I_{cr}$, 则认为土是相对不可压缩的, 此时地基发生整体剪切破

坏；若 $I_r < I_{cr}$ ，则认为土是相对可压缩的，此时地基可能发生局部剪切破坏或冲剪破坏。

地基土的刚度指标 I_r 按下式计算

$$I_r = \frac{G}{c + q \tan \varphi} \quad (10-44)$$

式中 G ——土的剪切模量；

q ——地基中膨胀区平均超载压力，一般可取基底以下 $B/2$ 深度处的土的自重压力。

而地基土的临界刚度指标 I_{cr} 按下式计算

$$I_{cr} = \frac{1}{2} \exp \left[\left(3.3 - 0.45 \frac{B}{L} \right) \cot (45^\circ - \varphi/2) \right] \quad (10-45)$$

对于发生局部剪切破坏或冲剪破坏的地基，魏西克建议将承载力系数 N_c 、 N_q 和 N_γ 分别乘以压缩影响因数 ξ_c 、 ξ_q 和 ξ_γ ，予以折减

$$\xi_q = \xi_\gamma = \exp \left\{ \left(-4.4 + 0.6 \frac{B}{L} \right) \tan \varphi + 3.07 \sin \varphi \cdot \frac{\lg 2 I_r}{1 + \sin \varphi} \right\} \quad (10-46)$$

$$\xi_c = 0.32 + 0.12 B/L + 0.6 \lg I_r \quad (\varphi = 0) \quad (10-47a)$$

$$\xi_c = \xi_q = \frac{1 - \xi_q}{N_c \tan \varphi} \quad (\varphi > 0) \quad (10-47b)$$

对于发生局部剪切破坏的地基，太沙基则建议在计算承载力系数 N_c 、 N_q 和 N_γ 时折减地基土的强度指标 c 、 φ 值，其方法为

$$c' = \frac{2}{3} c \quad \tan \varphi' = \frac{2}{3} \tan \varphi \quad (10-48)$$

10.3 斜向荷载下均质地基极限承载力计算

上述介绍的地基极限承载力公式都是在基础受中心竖向荷载情况下得到的。如果荷载是偏心或倾斜的，则问题较为复杂。由于水平力的存在，基础可能沿基底滑移或者地基产生整体剪切破坏。

梅耶霍夫、汉森和魏西克等均指出，当荷载偏心时，若为条形基础，则用有效宽度 $B_e = B - 2e$ 来代替原来的宽度 B ，其中 e 为荷载的偏心距，如图 10-13a 所示；如为矩形基础，则用有效宽度 $B_e = B - 2e_B$ 、有效长度 $L_e = L - 2e_L$ 来代替原来的宽度 B 和长度 L ，其中 e_B 、 e_L 分别为宽度和长度方向的偏心距，如图 10-13b 所示。对于任意形状的基础，如图 10-13c 和图 10-13d 所示。先将受偏心荷载的基础面积换算成受中心竖向荷载的有效面积，再换算成等面积的矩形基础，如图 10-13c 和图 10-13d 中的双点画线所示。

梅耶霍夫根据图 10-14 中所示的塑性破坏区形状, 考虑到基础的摩擦作用, 类似于受中心竖向荷载的情况, 提出了下列条形基础地基极限承载力公式

$$q_u = cN_{cq} + \frac{1}{2} \gamma B N_{\gamma q} \quad (10-49)$$

式中 N_{cq} 、 $N_{\gamma q}$ ——合成承载力系数, 取决于土的内摩擦角 φ 、荷载倾斜角 α 和基础的深宽比 D/B , 如图 10-15 所示。对于偏心荷载, 以 $B_e = B - 2e$ 代替 B 。

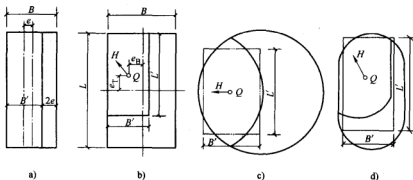


图 10-13 偏心荷载作用下的有效或等量的基础面积

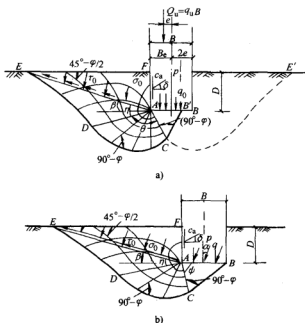


图 10-14 偏心或倾斜荷载时的塑性区

a) 基础受偏心荷载 b) 基础受倾斜荷载

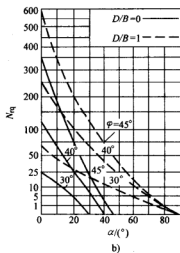
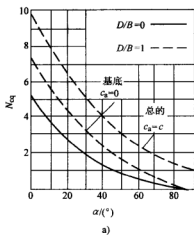


图 10-15 条形基础和倾斜荷载时梅耶霍夫的承载力系数 N_{cq} 和 N_q

汉森则建议将受中心竖向荷载情况下得到的承载力系数 N_c 、 N_q 和 N_γ 分别乘以荷载倾斜因数 i_c 、 i_q 和 i_γ ，其值可根据土的内摩擦角 φ 和荷载倾斜角 α 按表 10-3 查找。

表 10-3 荷载倾斜因数 i_c 、 i_q 和 i_γ

$\tan \alpha$	0.1			0.2			0.3			0.4		
$\varphi / (^\circ)$	i_c	i_q	i_γ	i_c	i_q	i_γ	i_c	i_q	i_γ	i_c	i_q	i_γ
6	0.643	0.802	0.526									
7	0.689	0.830	0.638									
8	0.707	0.841	0.691									
9	0.719	0.848	0.728									
10	0.724	0.851	0.750									
11	0.728	0.853	0.768									
12	0.729	0.854	0.780	0.396	0.629	0.441						
13	0.729	0.854	0.791	0.426	0.653	0.501						
14	0.731	0.855	0.798	0.444	0.666	0.537						
15	0.731	0.855	0.806	0.456	0.675	0.565						
16	0.729	0.854	0.810	0.462	0.680	0.583						
17	0.728	0.853	0.814	0.466	0.683	0.600	0.202	0.449	0.304			
18	0.726	0.852	0.817	0.469	0.685	0.611	0.234	0.484	0.362			

(续)

$\tan \alpha$	0.1			0.2			0.3			0.4		
$\varphi / (^{\circ})$	i_c	i_q	i_γ	i_c	i_q	i_γ	i_c	i_q	i_γ	i_c	i_q	i_γ
19	0.724	0.851	0.820	0.471	0.686	0.621	0.250	0.500	0.397			
20	0.721	0.849	0.821	0.472	0.687	0.629	0.261	0.510	0.420			
21	0.719	0.848	0.822	0.471	0.686	0.635	0.267	0.517	0.438	0.100		
22	0.716	0.846	0.823	0.469	0.685	0.637	0.271	0.521	0.451	0.100	0.317	0.217
23	0.712	0.844	0.824	0.468	0.684	0.643	0.275	0.524	0.462	0.122	0.350	0.266
24	0.711	0.843	0.824	0.465	0.682	0.645	0.276	0.525	0.470	0.134	0.365	0.291
25	0.706	0.840	0.823	0.462	0.680	0.648	0.277	0.526	0.477	0.140	0.374	0.310
26	0.702	0.838	0.823	0.460	0.678	0.648	0.276	0.525	0.481	0.145	0.381	0.324
27	0.699	0.836	0.823	0.456	0.675	0.649	0.275	0.524	0.485	0.148	0.384	0.334
28	0.694	0.833	0.821	0.452	0.672	0.648	0.274	0.523	0.488	0.149	0.386	0.341
29	0.691	0.831	0.820	0.448	0.669	0.648	0.273	0.520	0.489	0.150	0.387	0.348
30	0.686	0.828	0.819	0.444	0.666	0.646	0.268	0.518	0.490	0.150	0.387	0.352
31	0.682	0.826	0.817	0.438	0.662	0.645	0.265	0.515	0.490	0.150	0.387	0.356
32	0.676	0.822	0.814	0.434	0.659	0.643	0.262	0.512	0.490	0.148	0.385	0.357
33	0.672	0.820	0.813	0.428	0.654	0.640	0.258	0.508	0.489	0.146	0.382	0.358
34	0.668	0.817	0.811	0.422	0.650	0.638	0.254	0.504	0.486	0.144	0.380	0.358
35	0.663	0.814	0.808	0.417	0.646	0.635	0.250	0.500	0.485	0.142	0.377	0.358
36	0.658	0.811	0.806	0.411	0.641	0.631	0.245	0.495	0.482	0.140	0.374	0.357
37	0.653	0.808	0.803	0.404	0.636	0.628	0.240	0.490	0.478	0.137	0.370	0.355
38	0.646	0.804	0.800	0.398	0.631	0.624	0.235	0.485	0.474	0.133	0.365	0.352
39	0.642	0.801	0.797	0.392	0.626	0.619	0.230	0.480	0.470	0.130	0.361	0.349
40	0.635	0.797	0.794	0.386	0.621	0.615	0.226	0.475	0.466	0.127	0.356	0.346
41	0.629	0.793	0.790	0.377	0.614	0.609	0.219	0.468	0.461	0.123	0.351	0.342
42	0.623	0.789	0.787	0.371	0.609	0.605	0.213	0.462	0.456	0.119	0.345	0.337
43	0.616	0.785	0.783	0.365	0.604	0.600	0.208	0.456	0.451	0.115	0.339	0.333
44	0.610	0.781	0.779	0.356	0.597	0.594	0.202	0.449	0.444	0.111	0.333	0.327
45	0.602	0.776	0.775	0.349	0.591	0.588	0.195	0.442	0.438	0.107	0.327	0.322

10.4 双层地基的极限承载力计算

在天然情况下,地基常常是非均质的层状土。对于层状土,它就不可能形成如均质地基时的滑动形状,因而其承载力会发生变化。对于简单的层状土,可按

双层地基来处理。下面介绍几种双层地基极限承载力的计算方法。

10.4.1 $\varphi = 0$ 的层状粘土地基的极限承载力

当基础埋置在 $\varphi = 0$ 的两层软粘土地基上时，可以区分为两种典型情况：①持力层土比下卧层土软弱，即 $c_1 < c_2$ ，如图 10-16a 所示；②持力层土比下卧层土坚硬，即 $c_1 > c_2$ ，如图 10-16b 所示。当地基发生破坏时，对于第一种情况，将可能出现部分侧向塑流的形式；而对于第二种情况，将可能在下卧层顶部发生冲剪破坏。对于这两种情况的地基极限承载力，可按下式计算

$$q_u = c_1 N_m + q \quad (10-50)$$

式中 c_1 ——持力层（或上层）土的不排水剪强度指标；

q ——基础两侧土的超载；

N_m ——考虑层状影响的修正承载力系数，与两层土的不排水剪强度指标的比值 $k_c = c_2/c_1$ 、上层土的相对厚度 H/B 及基础形状等因素有关。

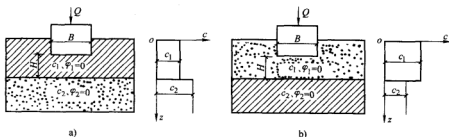


图 10-16 $\varphi = 0$ 的双层软粘土地基

对于 $c_1 < c_2$ 的情况，魏西克建议修正承载力系数 N_m 按下式确定

$$N_m = \frac{k_c N_c^* (N_c^* + \beta - 1) [(1 + k_c) N_c^{*2} + (1 + k_c \beta) N_c^* + \beta - 1]}{[k_c (1 + k_c) N_c^* + k_c + \beta - 1] [(N_c^* + \beta) N_c^* + \beta - 1] - [(k_c N_c^* + \beta - 1) (1 + N_c^*)]} \quad (10-51)$$

式中 β ——冲剪系数， $\beta = BL / [2(B + L)H]$ ；

N_c ——修正承载力系数， $N_c^* = N_c \lambda_c$ ， N_c 按普朗特地基极限承载力系数式 (10-16) 计算， λ_c 为基础形状因数，按表 10-2 确定。

对于方形或圆形基础，当 $B/H \leq 4$ 时，不论 k_c 取何值，均取 $N_m = 6.17$ 。

对于 $c_1 > c_2$ 的情况，布隆 (Brown) 和梅耶霍夫建议修正承载力系数 N_m 按下式确定

$$N_m = 1/\beta + k_c N_c \lambda_c \leq N_c \lambda_c \quad (10-52)$$

布隆和梅耶霍夫的试验研究指出，当上层为坚实粘土层时，其有效强度将随

土体的连续破坏而降低。因此,对于这种情况,在应用式(10-50)时,上层土的 c_1 应予以折减,并且建议,当粘土的灵敏度约为2时,可取折减系数为0.75。

10.4.2 有软弱下卧层时的地基极限承载力

当坚实土层下卧软弱土层并且在基底土层厚度 H 与基底宽度 B 相比较小时,根据梅耶霍夫和汉纳(Hanna)的研究(1978),此时,在上部土层中将发生冲剪破坏,而在下部土层中出现整体剪切破坏,如图10-17a所示。对于这种层状地基的极限承载力,将由上下两层土联合组成,按下式确定

$$q_u = q_b + 2c_a \frac{H}{B} + \gamma_1 H^2 \left(1 + \frac{D}{H} \right) \frac{k_s \tan \varphi_1}{B} - \gamma_1 H \quad (10-53)$$

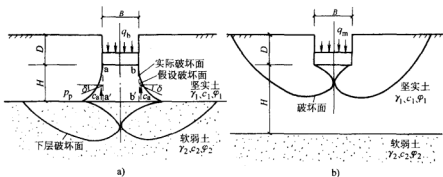


图10-17 有软弱下卧层时的双层地基

a) B/H 较小 b) B/H 较大

式中

q_b ——下卧软弱土层的极限承载力,按下式确定

$$q_b = c_2 N_{c2} + \gamma_1 (D + H) N_{q2} + \frac{1}{2} \gamma_2 B H \gamma_2 \quad (10-54)$$

N_{c2} 、 N_{q2} 、 $N_{\gamma 2}$ ——下卧软弱土层极限承载力系数,由下卧层土的内摩擦角 φ_2 按 $\beta = 0$ 、 $F_s = 0$ 时的梅耶霍夫公式确定;

γ_2 、 c_2 ——下卧层土的重度和凝聚力;

k_s ——冲剪系数,它是 q_2/q_1 和上层土的凝聚力 φ_1 的函数,如图10-19所示。 q_1 、 q_2 分别为当假设基础位于上、下土层表面时的地基极限承载力,按下式确定

$$q_1 = c_1 N_{c1} + \frac{1}{2} \gamma_1 B N_{\gamma 1} \quad (10-55)$$

$$q_2 = c_2 N_{c2} + \frac{1}{2} \gamma_2 B N_{\gamma 2} \quad (10-56)$$

N_{c1} 、 $N_{\gamma 1}$ ——上层土极限承载力系数,由上层土的内摩擦角 φ_1 按 $\beta = 0$ 、 $F_s = 0$ 时的梅耶霍夫公式确定;

γ_1 、 c_1 ——上层土的重度和凝聚力；

c_a —— aa' 或 bb' 面上的附着力，可从图 10-18 中查取；

H ——基底下坚实土层的厚度；

D ——基础埋深。

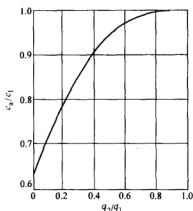


图 10-18 c_a/c_1 与 q_2/q_1 的关系曲线

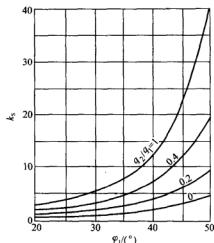


图 10-19 冲剪系数 k_s 与 q_2/q_1 和 φ_1 的关系曲线

若基底下坚实土层的厚度 H 相对于基底宽度 B 而言比较大，则破坏面将位于上层土层，如图 10-17b 所示。此时，地基极限承载力完全由上层土的性质确定，即

$$q_u = q_t = c_1 N_{c1} + q_1 N_{q1} + \frac{1}{2} \gamma_1 B N_{\gamma_1} \quad (10-57)$$

式中 q_t ——上层土的极限承载力。

由于上层土的强度大于下层土，因此，由式 (10-57) 求得的值不得超过由式 (10-53) 求得值。当基础的形状是宽为 B 、长为 L 的矩形时，则应考虑基础形状因数的修正，此时，式 (10-53)、式 (10-54) 和式 (10-57) 应分别改写为下列形式

$$q_u = q_b + 2c_a \frac{H}{B} \left(1 + \frac{B}{L}\right) \lambda_a + \gamma_1 H^2 \left(1 + \frac{D}{H}\right) \left(1 + \frac{B}{L}\right) \frac{k_s \tan \varphi_1}{B} \lambda_s - \gamma_1 H \quad (10-58)$$

$$q_b = c_2 N_{c2} \lambda_{c2} + \gamma_1 (D + H) N_{q2} \lambda_{q2} + \frac{1}{2} \gamma_2 B N_{\gamma 2} \lambda_{\gamma 2} \quad (10-59)$$

$$q_t = c_1 N_{c1} \lambda_{c1} + q_1 N_{q1} \lambda_{q1} + \frac{1}{2} \gamma_1 B N_{\gamma 1} \lambda_{\gamma 1} \quad (10-60)$$

以上各式中， λ_a 、 λ_s 为基础形状因数，可近似取 1.0； λ_{c1} 、 λ_{q1} 、 $\lambda_{\gamma 1}$ 和 λ_{c2} 、

λ_{q1} 、 λ_{q2} 分别对应于上层土 φ_1 和下层土 φ_2 的基础形状因数, 由表 10-2 中的梅耶霍夫公式确定。

对于具有软弱下卧层的双层地基, 魏西克 (1970) 则假定此时的滑动面为竖直面, 地基极限承载力可按式 (10-61) 确定

$$q_u = \left(q_b + \frac{c_1}{k_1} \cot \varphi_1 \right) \exp \left[2 \left(1 + \frac{B}{L} \right) \frac{H}{B} k_1 \tan \varphi_1 \right] - \frac{c_1}{k_1} \cot \varphi_1 \quad (10-61)$$

式中, $k_1 = (1 - \sin^2 \varphi_1) / (1 + \sin^2 \varphi_1)$, 其余符号意义同前。

若上层土为无粘性土, 即 $c_1 = 0$, 并当 $25^\circ < \varphi_1 < 50^\circ$ 时, 上式可简化为

$$q_u = q_b \exp \left[0.67 \left(1 + \frac{B}{L} \right) \frac{H}{B} \right] \quad (10-62)$$

整理式 (10-62) 并将式中的 H 提出, 即可作为判别软弱下卧层对地基极限承载力有无影响的临界值, 称为“临界深度”。于是, 临界深度 H_{cr} 为

$$H_{cr} = 1.5 B \ln \left(\frac{q_1}{q_b} \right) / \left(1 + \frac{B}{L} \right) \quad (10-63)$$

以上各式中的 q_1 、 q_b 表示将基础分别埋在上层和下卧层时的地基极限承载力, 均按魏西克公式计算。

若 $H < H_{cr}$, 则表示下卧层对地基极限承载力有影响, 应该采用双层地基的极限承载力公式计算; 若 $H > H_{cr}$, 则表示下卧层对地基极限承载力没有影响, 可按均质地基的极限承载力公式计算。

10.4.3 软弱土层位于坚实土层上的地基极限承载力

软弱土层位于坚实土层上的情况可分为两种: 其一是基底下软弱土层的深度 H 相对于基底宽度 B 来讲较小, 此时破坏面将穿过下部坚实土层, 如图 10-20 左侧所示; 其二是当基底下软弱土层的深度 H 相对于基底宽度 B 来讲较大, 此时破坏面将全部位于上层土中, 如图 10-20 右侧所示。

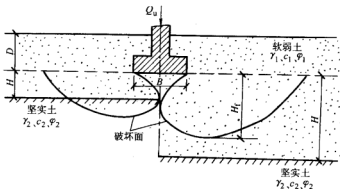


图 10-20 软弱土层位于坚实土层上的双层地基

对于这种情况下的地基极限承载力的计算，梅耶霍夫和汉纳（1978）提出如下的半经验公式

$$q_u = q_1 + (q_b - q_1)(1 - H/H_f)^2 \geq q_1 \quad (10-64)$$

式中 H_f ——软弱土层中破坏面的深度，对于松砂和粘土，取 $H_f = B$ ，对于密砂，则取 $H_f = 2B$ 。

10.4.4 下卧层为刚性层时的地基极限承载力

当土层下埋藏着刚性层且基底下的土层深度 H 大于破坏面的深度 H_f 时，则地基极限承载力仍可按均质地基的情况计算；当土层下埋藏着刚性层且基底下的土层厚度 $H < H_f$ 时，则地基破坏时的滑动面将受到限制并出现如图 10-21 所示的情况。对于这种情况，曼德尔（Mandel）和塞尔康（Salencon）于 1972 利用塑性理论并借助于数值积分的方法，对粗糙刚性基底情况，提出了下列地基极限承载力计算公式

$$q_u = cN'_c + qN'_q + \frac{1}{2} \gamma BN'_\gamma \quad (10-65)$$

式中 N'_c 、 N'_q 、 N'_γ ——修整的地基承载力系数，根据土层的 φ 值从图 10-22 中查取。

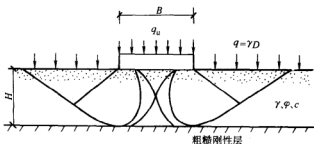


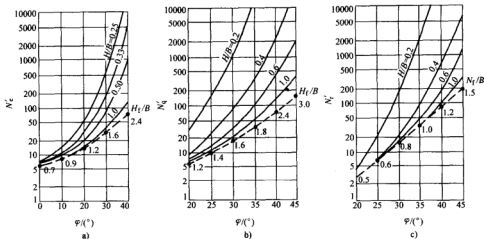
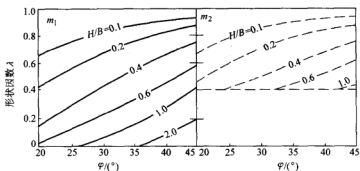
图 10-21 刚性下卧层深度 $H < H_f$ 的情况

破坏面的极限深度 H_f 与土层的内摩擦角 φ 有关，可从图 10-22 中的虚线查取。

若上层为砂土（ $c = 0$ ）、下部为粗糙刚性层，对于矩形或圆形基础，梅耶霍夫（1974）引入形状因数，得到地基极限承载力计算公式为

$$q_u = qN'_q\lambda_q + \frac{1}{2} \gamma BN'_\gamma\lambda_\gamma \quad (10-66)$$

式中，形状因数 $\lambda_q = 1 - m_1$ ， $\lambda_\gamma = 1 - m_2$ ， m_1 和 m_2 随 H/B 和 φ 而变，可查图 10-23。

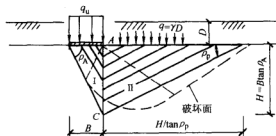

 图 10-22 N'_c 、 N'_q 、 N'_γ 与 φ 的关系曲线

 图 10-23 m_1 和 m_2 与 H/B 和 φ 的关系曲线

10.5 地震作用下地基极限承载力计算

根据 Terzaghi 理论, 静力作用下地基的极限承载力可表示为

$$q_u = cN_c + \gamma DN_q + \frac{1}{2} \gamma BN_\gamma \quad (10-67)$$

该极限承载力公式是基于 Prandtl 破坏面的, 这个破坏面可以作一些简化, 如图 10-24 所示。Richard 等 (1993) 考虑了 AC 面上的剪切摩擦的影响, 根据图示


 图 10-24 静力滑移场的简化 ($\delta \neq 0$)

两个 Coulomb 楔体之间的平衡条件, 可以得到如下表达式

$$N_q = K_p / K_A \quad (10-68)$$

$$N_\gamma = [K_p / K_A - 1] \tan \rho_A \quad (10-69)$$

其中

$$K_A = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \delta \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin \varphi}{\cos \delta}} \right]^2} \quad (10-70)$$

$$K_P = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \delta \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \delta) \sin \varphi}{\cos \delta}} \right]^2} \quad (10-71)$$

$$\rho_A = \varphi + \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{\tan \varphi (\tan \varphi + \cot \varphi) (1 + \tan \delta \cot \varphi)} - \tan \varphi}{1 + \tan \delta (\tan \varphi + \cot \varphi)} \right] \quad (10-72)$$

式中 δ ——AC 线上的摩擦角。

Richard 等(1993)指出, 当取 $\delta = \varphi/2$ 时, 由上述简化滑移面得到的地基极限承载力与基于 Prandtl 破坏面得到的极限承载力比较接近。

为了考虑地震地面运动的影响, 采用 Mononobe-Okabe 地震土压力公式, 可以得出地震作用下的地基极限承载力公式

$$q_{wE} = cN_{cE} + \gamma DN_{qE} + \frac{1}{2} \gamma BN_{\gamma E} \quad (10-73)$$

其中

$$N_{qE} = K_{PE} / K_{AE} \quad (10-74)$$

$$N_{\gamma E} = [K_{PE} / K_{AE} - 1] \tan \rho_{AE} \quad (10-75)$$

$$K_{AE} = \frac{\cos^2(\varphi - \theta)}{\cos \theta \cos(\delta + \theta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \theta)}{\cos(\delta + \theta)}} \right]^2} \quad (10-76)$$

$$K_{PE} = \frac{\cos^2(\varphi - \theta)}{\cos \theta \cos(\delta + \theta) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \theta)}{\cos(\delta + \theta)}} \right]^2} \quad (10-77)$$

$$\rho_{AE} = (\varphi - \theta) + \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi - \theta) [1 + \tan(\delta + \theta) \cot(\varphi - \theta)]} - \tan(\varphi - \theta)}{1 + \tan(\delta + \theta) [\tan(\varphi - \theta) + \cot(\varphi - \theta)]} \right\} \quad (10-78)$$

$$\theta = \frac{k_h}{1 - k_v} \quad (10-79)$$

式中 k_h, k_v ——水平向、竖向地震加速度系数。

参 考 文 献

- 1 钱家欢,殷宗泽主编.土工原理与计算.第2版.北京:中国水利水电出版社,2000
- 2 沈珠江著.理论土力学.北京:中国水利水电出版社,2000
- 3 郑大同编.地基极限承载力的计算.北京:中国建筑工业出版社,1979
- 4 顾晓鲁,钱鸿缙,刘慧珊,汪时敏主编.北京:地基与基础.第3版.北京:中国建筑工业出版社出版社,2003
- 5 吴天行著.土力学.冯国栋,唐介眉,刘祖德,陆仕强译.成都:成都科技大学出版社,1982
- 6 Craig R.F. Soil Mechanics, Fifth edition. Published by Chapman & Hall, UK
- 7 Mononobe, N., Takata, A. Matumura, M. Seismic stability of earth dam. In: Proc. 2nd congress of large dams, Vol. 4, Washington, D. C., USA, 1936
- 8 Richards, R., Elms, D. G., Budhu, M. Seismic bearing capacity and settlements of foundations. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1993(4)

第 11 章 土的动力特性

11.1 概述

土动力学是土力学的一个分支学科。土动力学早期的研究主要集中在机器基础的振动方面,大约始于 20 世纪 30 年代。由于各国学者的努力,在 20 世纪 60 年代达到比较成熟的阶段。防护工程也是土动力学一个重要的研究领域,大约始于 20 世纪 40 年代,由于与军事有关的研究,其成果的公开报道很少。地震工程领域中比较系统的土动力学研究,大约始于 20 世纪 60 年代初;到 20 世纪 80 年代,土动力学已经发展成为土力学和工程地震学的一个独立的交叉分支。到 20 世纪 70 年代,由于近海重力式石油平台的大量兴建,研究者们对波浪运动作用下土的动力特性发生了浓厚兴趣,土动力学也逐步成为海洋工程的一项重要内容。就土动力学问题而言,不论是地震工程与防护工程,还是海洋工程,都是研究地面运动作用下土的动力特性,一般的研究思路都是以共(自)振柱仪、振动三轴仪或循环扭转仪试验为基础,研究土的动变形与强度特性,包括土的动应力-应变关系、砂土液化、粘性土动强度、振动孔隙水压力等问题,只是试验时循环荷载的加载频率和循环次数及仪器的技术性能要求不同而已。

早在 1936 年, Casagrande 就试图用临界孔隙比的概念去解释砂土的液化现象。当密实砂土受剪时,体积膨胀,而松散砂土在同样条件下体积减小。砂土处于某一孔隙比,它在受剪时体积不变,这个孔隙比称为临界孔隙比。Casagrande 解释说,如果砂土层的孔隙比大于临界孔隙比,则由于振动作用,砂土层的体积减小;如果处于不排水状态,孔隙水压力就会增高,可能产生液化现象。然而,临界孔隙比的概念不足以定量分析砂土层的液化势。临界孔隙比不是一个常数,它随周围压力大小而改变。20 世纪 70 年代, Casagrande 重新调整了“临界孔隙比”的概念和试验方法,提出了“流动结构”和“稳态抗剪强度”等概念。沿着这一思路, Castro 和 Poulos 等做了系统的研究工作。

从 20 世纪 60 年代起,对究竟哪些参数控制砂土的液化在世界各地开展了广泛的研究。室内模拟现场液化试验的研究主要采用动三轴试验、动扭转试验、振动台试验以及离心模型试验。然而,最普遍采用的试验方法是动三轴试验和动单剪试验。Seed 和 Lee 进行了饱和松散砂土、密实砂土的动三轴试验,模拟水平向地震运动在饱和砂土层中产生的往返剪应力作用下砂土液化的定量分析,以振动孔隙水压力 u 作为判断砂土液化的依据,其后被广泛引用的“初始液化”的概

念,指出砂土液化势取决于下列五个因素:相对密度 D_r 、周围压力 σ_3 、往返应力峰值 σ_d 、往返应力作用次数 N 和超固结比 OCR。对于饱和的松散、中密砂土,当振动孔隙水压力 u 升高到周围压力 σ_3 时,其抗剪强度或对剪切变形的能力会产生大幅度的降低或完全丧失,即产生典型的液化现象;而对饱和的密实砂土,当振动孔隙水压力 u 升高到周围压力 σ_3 时,在往返应力作用下主要产生一定大小的往返变形,单方向累积变形发展得很缓慢或者会停止发展。为了将这个现象与上述的典型液化现象相区别,Seed 称这为往返流动性 (Cyclic mobility),认为是土的剪胀减小了振动孔隙水压力的发展,这有利于往返荷载作用下土的稳定性。从此之后,关于砂土地震液化及与地震液化密切相关的振动孔隙水压力发展规律的研究得到迅速发展。

20 世纪 70 年代,随着近海重力式石油平台的大量兴建,研究者们开展了波浪运动等周期荷载作用下砂土液化的可能性和液化强度等问题,后来又注意到了振动孔隙水压力消散的现象。另一方面,周期荷载作用下粘性土性状的研究也取得了较多的成果,Andersen 等人应北海重力式石油平台建设的需要,曾对 Drammen 粘土进行了系统而广泛的研究,分析了试验方式、剪应力幅值、超固结比等因素的影响,而 Matsui 研究了振动孔隙水压力与剪应变之间的关系,以及往返荷载作用历史对剪切特性的影响。由于沉积环境、组成成分和天然固结状态等条件的不同,使得海洋土的工程特性与陆地上土存在较大的差异。由于海洋土经受巨大自重及小幅度波浪的长期作用和暴风巨浪或地震等非常环境荷载的瞬时作用,一般处于复杂的应力状态,从而与陆地上地基或场地存在着较大的差异。

黄文熙在国内最早提出了用动三轴试验研究砂土液化的途径;汪闻韶给出了振动孔隙水压力与砂土的性状、振动强度、应力状态和排水条件之间的关系,指出了初始剪应力对液化的影响,还用试验证实粉土(当时称轻亚粘土)对振动很敏感,很容易液化。

现场研究和室内试验表明,除了洁净砂外,含有细粒的砂也存在液化的可能性。有的学者认为,砂土抗液化能力随砂土中细粒含量的增加而增大;有的学者则认为,砂土抗液化能力随砂土中细粒含量的增加而降低。此外,有的研究则发现,当砂土中细粒含量增加时砂土的液化抗力先减小到一个最小值,然后,当砂土中细粒含量继续增大时,砂土的液化抗力逐步增加。关于液化的研究大多是着眼于均匀的洁净砂或砾;然而大量的工程实录显示不同于洁净砂的土也会液化。另外,有的学者采用离心模型试验来研究成层砂质粉土的动力特性,模型试验结果显示,液化过程中砂土和粉土界面两侧由于不同的透水性,会形成一个中间水层或者土层的松散带;且在试验过程中可以看到粉土表面有砂沸现象发生。Seed、Youd 等相继开展的细粒含量对抗液化强度的影响研究,得出许多有益的成果。由于土的沉积环境不同而导致土的结构性的差异,而土的结构性对抗液化

能力的影响并不亚于密度、固结压力等因素。陈国兴等通过动三轴试验,探讨了土的结构性、有效围压和固结比等对南京新近沉积土动力特性的影响。

11.2 饱和砂土的振动液化

11.2.1 饱和砂土振动液化的概念与机理

砂土液化判别一直是土动力特性研究中的一个主要问题之一。美国土木工程师协会岩土工程分会土动力学委员会(1979)对“液化”一词的定义是“液化——任何物质转化为液体的行为和过程。就无粘性土而言,这种由固体状态变为液体状态的转化是孔隙水压力增大和有效应力减小的结果”。

关于饱和砂土液化的机理,大致可归纳为三种类型:砂沸(sand boil)、循环流动性(cyclic mobility)、流滑(flow slide)。

砂沸是饱和砂土中孔隙水压力超过上覆土体自重时所引起的喷砂冒水现象。

循环流动性是指在循环剪切过程中,由于土体剪缩和剪胀的交替作用而引起的孔隙水压力反复升降而造成的间歇性液化和有限制的流动变形现象。它主要发生在中密和较密的饱和砂土中。

流滑是指饱和松散砂土在单向或循环剪切作用下,土体持续剪缩,呈现出不可逆的体积压缩,引起孔隙水压力不断上升和有效应力减小,抗剪强度降低,最后导致“无限制”的流动大变形。

Seed 等在其所进行的饱和和密砂固结不排水动三轴试验中证明了“循环流动性”这一现象的存在,发现试样仅在循环荷载作用的某些时刻出现孔隙水压力等于周围固结压力的情况,此时,有效应力等于零,出现瞬态液化现象。这一现象随后被其他学者所证实。循环荷载作用初期的累积剪缩(伴随孔隙水压力的持续上升)及后期的加载剪胀和卸载剪缩的交替作用,就形成了通常所称的循环流动性。循环流动性的产生不仅与砂土的密实度有关,而且还与周围固结压力大小、主应力比、往返动应力幅值及次数等因素密切相关。研究表明,对于较密实的砂土(如相对密度达0.7),在适当的条件下也会出现“初始液化”,并发生有限的流动。

Casagrande 早期提出的“临界孔隙比”概念及后期阐述的“流动结构”和“稳态抗剪强度”等概念就源于“流滑”这一思想。Castro、Ishihara 等认为在 $e-p'-q$ 状态空间中存在着“稳态线”(steady state line)。当试样在不排水剪切中,应力点落在稳态线上时,土体即处于稳态。这时试样的剪应力即为该孔隙比下的剩余强度,这一孔隙比称为该有效小主应力 σ'_{3c} 下的临界孔隙比 e_{cr} 。如果试样在孔隙比大于该有效小主应力 σ'_{3c} 下的临界孔隙比 e_{cr} 条件下受到不排水周期剪切作用,试样体积发生剪缩,引起孔隙水压力增大,发生初始液化。如果剪应

力大于土的剩余强度,将发生无限的流动变形。较密试样在不排水周期剪切时可发生有限的周期变形,但由于试样剪胀,要有反向剪应力才能达到初始液化。因此,有无反向剪应力及剪应力是否大于土的剩余强度是分析初始剪应力对液化影响的重要条件。Castro 的试验进一步表明,并非所有初始状态高于“稳态线”的饱和砂土在不排水动三轴试验中都发生流滑,“稳态线”也并不是剪胀和剪缩的分界线,而只是出现“流动结构”时的状态线。

就液化的评价准则而言,大致存在以 Seed 等人为代表的循环流动性准则和以 Casagrande 为代表的临界孔隙比准则。前者从液化的应力状态出发,以饱和砂土在首次出现振动孔隙水压力等于上覆土体有效自重应力 σ'_v (动三轴试验中为固结应力 σ_{3c} , 动单剪试验中为竖向应力 σ_v), 此时,土体强度完全损失;在后续的往返荷载作用下液化状态周期性地发生,土体变形不断积累,表现出土的循环流动性。研究的重点在于确定达到初始液化的静动力条件,估计初始液化发生的可能性及其范围。而后者则根据液化破坏所表现出的过量位移和变形这一特点出发,强调土的流动特征,而并不强调土体所处的应力状态和是否发生初始液化。显然,两种不同的液化评价准则相应地代表了土体液化研究的两种不同途径。

11.2.2 饱和砂土震动液化的影响因素

对于水平场地的土单元体,地震前作用在土单元体的应力状态如图 11-1a 所示,其中, σ'_v 为竖向有效应力, $K_0\sigma'_v$ 为水平向有效应力, K_0 为静止土压力系数;地震时产生的往返剪应力 τ_h 将作用在土单元体上,如图 11-1b、图 11-1c 所示。因此,研究液化的任何室内试验都必须模拟这一应力状态。早期的室内试验主要是研究土的抗液化性能,在这些试验中,通常将达到初始液化或循环应变幅值达到某一限值定义为液化破坏。

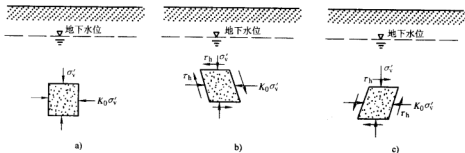


图 11-1 地震时水平场地土单元体的应力状态

图 11-2 是饱和中密砂和密实砂的三轴试验结果。可以看出,中密砂的振动孔隙水压力上升很快,达到初始有效应力 σ'_{3c} 时应变突然增大,表明土样发生了

液化。而密实砂的振动孔隙水压力上升很慢，达到初始有效应力 σ'_{3c} 时应变逐渐增大，但不超过某一限值，此时，再继续加荷只能引起有限幅度的应变值，这一特性就是前述的循环流动性。在往返荷载作用下，一般称振动孔隙水压力峰值达到初始有效固结应力时为初始液化。

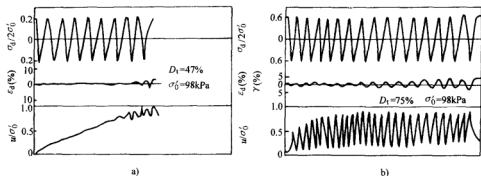


图 11-2 中密和密实饱和砂土的动三轴试验结果

a) 中密砂 b) 密砂

图 11-3 是均等固结时松散饱和的南京粉细砂的动三轴试验结果。从图 11-2 和图 11-3 可以看出，对于松一中密的饱和砂土，初始液化发生大变形；而对于密实砂土，只发生有限的应变，处于周期性的不稳定状态。研究表明，振动孔隙水压力达到初始有效固结应力时，循环轴向应变峰值一般在 2.5% ~ 3.5%。因此，通常将循环双幅轴向应变峰值 5% 作为砂土初始液化的标准。

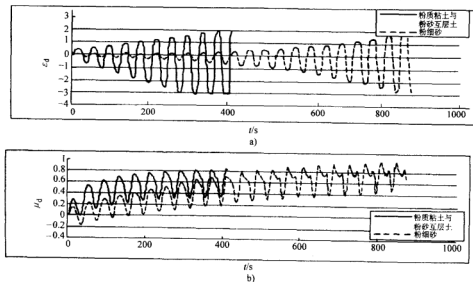


图 11-3 固结比 $K_c = 1.0$ 时松散饱和的南京粉细砂和粉质粘土与粉砂的动三轴试验结果

a) $\epsilon_d - t$ 关系图 b) $u_d - t$ 关系图

从现有的试验结果看,影响土的抗液化特性的主要因素有:①土性条件,主要指土的密实度、颗粒特征和土的结构性;②初始应力条件,指施加动荷载前土体所承受的应力状态。下面予以分别讨论。

1. 相对密实度的影响

试验表明,相对密实度 D_r 愈大,抗液化强度愈高;同时,相对密实度 D_r 较大时,对不同的液化破坏标准将有明显的影响。Seed 和 Lee 的饱和 Sacramento 河砂动三轴试验结果表明,在大多数情况下,当双幅剪应变峰值达 20% 时可以认为土样已经破坏。对于松砂,初始液化和破坏同时发生。然而,当相对密度增大时,引起 20% 双幅剪应变峰值和初始液化所需要的往返振动次数的差别就显著扩大,如图 11-4 所示。Peacock 和 Seed 通过对饱和 Monterey 砂的动单剪试验得到了如图 11-5 所示的产生初始液化的剪应力峰值 τ_h 与相对密实度 D_r 的关系曲线,从中可以看出,当相对密实度 D_r 小于 70% ~ 80% 时,引起初始液化所需的剪应力峰值 τ_h 随相对密实度 D_r 呈线性增加。DeAlba 等利用大型动单剪仪对不同密度状态的饱和砂土进行试验研究,得到图 11-6 所示的结果。此外,还研究了相对密实度 D_r 对不同的液化破坏标准的影响,如图 11-7 所示。可以看出,当相对密实度 D_r 大于 45% 时,对不同的液化破坏标准有明显的影响。对 Tokimatsu 等通过对重塑砂土和原状砂土的动三轴试验,考虑了应变幅值的影响,得到如图 11-8 所示的典型试验曲线。

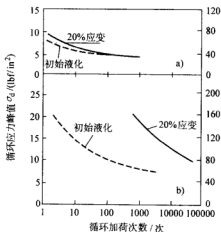


图 11-4 相对密实度对饱和 Sacramento 河砂液化的影响

a) 初始孔隙比 = 0.87, 相对密实度 = 38%,
 $\sigma'_v = 14.2 \text{ lb/in}^2$ (98.2 kN/m^2);

b) 初始孔隙比 = 0.61, 相对密实度 = 100%,
 $\sigma'_v = 14.2 \text{ lb/in}^2$

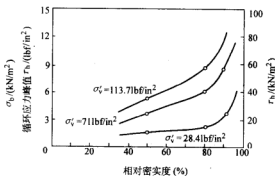


图 11-5 相对密实度对饱和 Monterey 砂初始液化的影响

2. 颗粒平均粒径 D_{50} 的影响

Seed 等把对各种不同的砂所做的液化试验结果加以综合, 给出给定往返荷载次数下的初始液化标准曲线。

图 11-9a 表示在往返加荷到 30 次时产生初始液化的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 与颗粒平均粒径 D_{50} 的关系, 适用于相对密实度 $D_r = 50\%$ 的情况; 而图 11-9b 表示类似的往返加荷到 30 次时产生初始液化的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 与平均粒径 D_{50} 的关系。可以看到, 平均粒径 $D_{50} = 0.07 \sim 0.08\text{mm}$ 的饱和砂土最容易发生初始液化。

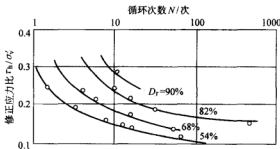


图 11-6 大型动单剪试验得到的产生初始液化的修正 τ_h/σ'_c 与 N 的关系

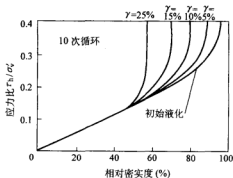


图 11-7 大型动单剪试验得到的往返应力 10 次的双幅剪应变峰值与相对密实度的关系

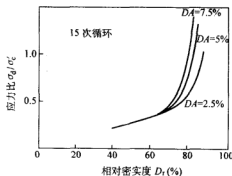


图 11-8 动三轴试验对应不同双幅剪应变峰值的往返应力比与相对密度的关系

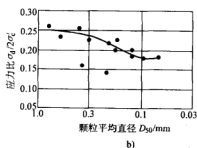
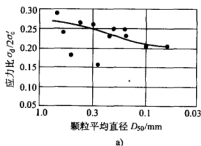


图 11-9 动三轴试验得到的引起饱和砂土初始液化的往返应力比与颗粒平均粒径 D_{50} 的关系

a) 循环 10 次 b) 循环 30 次

3. 粘粒或细粒含量的影响

砂土中的粘粒（粒径小于 0.005mm）或细粒（粒径小于 0.075mm）含量增加到一定程度时，土的动力稳定性将有所增加。因此，粉土一般要比砂土难液化，但在强地震作用下仍然可发生液化。Tokimatsu 等、Seed 等和 Youd 等通过现场标准贯入试验和液化情况考察，建立起发生液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 与标准贯入击数和细粒含量 FC 的关系曲线；我国《建筑抗震设计规范》（GB5001—2001）则采用粘粒含量 ρ_c 来反映细颗粒土对土的抗液化强度的影响。

4. 塑性指数的影响

对于细粒含量大于 50% 的粉质砂土，试验中普遍发现，相对密度 D_r 并不是描述影响初始液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 的一个适宜的指标。图 11-10 的试验结果清楚地说明了这一结论。但也可以看出，当塑性指数 $I_p < 10$ 时，塑性指数对引初始液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 没有明显的影响。

5. 初始应力条件的影响

现场震害考察表明，当饱和砂层埋深较深时它就不容易液化，这表明震前土的初始应力状态对抗液化能力有显著的影响。

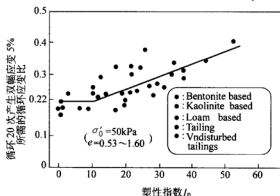


图 11-10 塑性指数对含细粒砂初始液化往返应力比的影响

Lee 和 Seed 等所进行的饱和砂土均等固结三轴试验证明了这一事实。均等固结三轴试验实际上模拟了震前土体中无初始静剪应力的情况。该试验结果表明，固结应力越大引起液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 或往返作用次数也越大。然而，这个影响规律与饱和砂土的密度及选用的液化破坏标准有关。如果固结应力 σ'_c 小于 500kPa，则不论饱和砂土的密度大小及采用何种液化破坏标准，引起液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 与相应的往返作用次数 N_f 的之间关系和固结应力 σ'_c 的大小无关。正是利用这一特点，通常采用固结应力 $\sigma'_c = 100\text{kPa}$ 进行饱和砂土的液化试验。

震前土体中有初始静剪应力的情况可以通过非均等固结条件下的往返荷载试验进行模拟。图 11-11 和图 11-12 分别给出动三轴试验和动扭转剪切试验中固结比 K_c 对饱和砂土引起液化所需的往返应力比的影响。在扭转剪切试验中，往返应力比定义为往返扭转剪应力幅值 τ_d 与竖向有效固结应力 σ'_c 的比值。由图可见，在非均等固结条件下，固结比 K_c 越大，饱和砂土引起液化所需的往返应力比也越大。

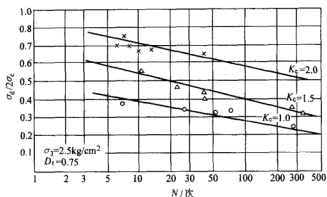


图 11-11 动三轴试验中固结比对引起液化所需的往返应力比的影响

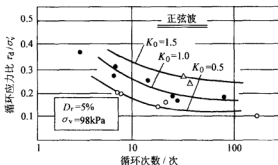


图 11-12 动扭转剪切试验中固结比对引起液化所需的往返应力比的影响

此外，如果将竖向有效固结应力 σ'_v 通过下列关系转换为平均有效固结应力 σ'_0

$$\sigma'_0 = \frac{1+2K_c}{2} \sigma'_v$$

并将图 11-12 中的往返应力比 τ_d/σ'_v 变换为修正往返应力比 τ_d/σ'_0 ，则试验数据可以重新整理成如图 11-13 所示。可以看到，不同固结比 K_c 值的修正往返应力比 τ_d/σ'_0 与往返作用次数 N 之间关系曲线几乎是一致的，固结比 K_c 的影响完全消除。

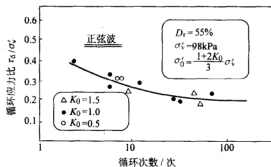


图 11-13 不同固结比条件下修正往返应力比与往返作用次数的关系

Finn 引用 Bhatia 用常体积往返剪切仪进行的研究结果, 如图 11-14 所示。可以看到, 饱和砂土引起液化所需的往返应力比 τ_d/σ'_v 随超固结比 OCR 的增加而增大。如果用静止侧压力系数 K_0 将往返应力比 τ_d/σ'_v 进行修正, 变换为修正往返应力比 $\tau_d/K_0\sigma'_v$, 则对于不同超固结比 OCR 值, 修正往返应力比 $\tau_d/K_0\sigma'_v$ 与往返作用次数 N 之间关系曲线几乎是一致的 (图 11-15), 超固结比 OCR 的影响完全消除。

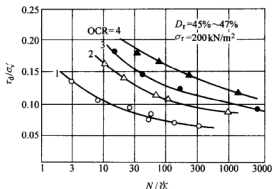


图 11-14 往返剪切试验中超固结比 OCR 对引起液化所需的往返应力比的影响

6. 砂土结构性的影响

饱和砂土的结构性影响包括许多方面, 如原状饱和砂土的扰动影响、重新制备饱和砂土样成型方法和静应力作用持续时间的影响、饱和砂土沉积环境差异引起的结构性影响。

下面以南京粉质粘土与粉砂互层土和南京粉细砂为例。从图 11-16 可以看出, 对于南京粉细砂, 在均压固结条件下, 动三轴试验中引起初始液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_v$ 与相应的往返作用次数 N 之间的关系和固结应力 σ'_v 的大小无关。而在偏压固结条件下, 固结应力 σ'_v 的大小对引起初始液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_v$ 有明显影响。而对于南京粉质粘土与粉砂互层土, 无论是等压固结还是偏压固结, 固结应力 σ'_v 的大小对动三轴试验中引起初始液化所需的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_v$ 与相应的往返作用次数 N 之间关系有较大的影响。在固结应力 $\sigma_3 = 100\text{kPa}$ 时, 无论是偏压固结还是等压固结, 在相同往返作用次数 N 下, 南京粉质粘土与粉砂互层土的液化剪应力比 $\sigma_d/2\sigma'_v$ 要比南京粉细砂的液化剪应力比大得多 (图 11-17)。这表明粉细砂比粉质粘土与粉砂互层土更容易液化。

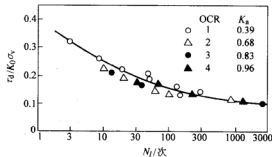


图 11-15 不同超固结比条件下修正往返应力比与往返作用次数的关系

11.2.3 饱和砂土的液化往返应力比或抗液化强度

合理选取液化标准是研究饱和砂土液化问题的基础。对于饱和砂土的不排水往返荷载试验, 液化标准可表示为孔隙水压力的某种发展程度, 称为孔压标准。

对饱和松砂，初始液化一般按 Seed 等所用的定义：在往返荷载下取试样的累振动孔隙水压力等于固结应力为液化标准，即当试样的累计振动孔隙水压力比 u/σ'_c 等于 100% 时为初始液化标准；也可采用变形标准作为初始液化标准，即根据工程的重要性和经验选定不同的双幅轴向应变值，一般对易液化的饱和松、中密的砂土取双幅轴向应变 5% 作为初始液化的标准，而对不易液化的饱和密砂、粉土取双幅轴向应变 10% 作为初始液化的标准。大量试验表明，对饱和松砂，孔压标准和变形标准是完全一致的。

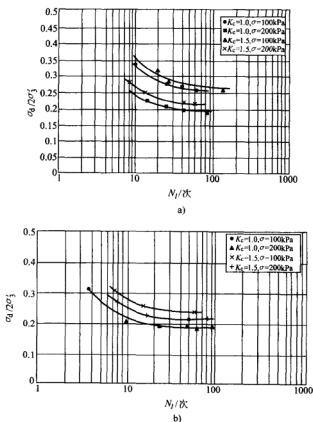


图 11-16 不同固结比和固结应力条件下南京粉质粘土与粉砂互层土、粉细砂动三轴试验中引起液化所需的往返应力比与往返作用次数的关系
a) 等压固结 b) 非等压固结 ($K_c=1.5$)

通常，为了考虑固结应力 σ'_c 和往返应力幅值 σ_d 的影响，用给定往返作用次数 N_f 下饱和砂土达到液化标准所需要的往返应力比 $\sigma_d/2\sigma'_c$ 作为土的抗液化强度的量度。结合大型振动台的液化试验结果，Seed 等建议的地震震级与等效往返作用次数的关系如表 11-1 所示。

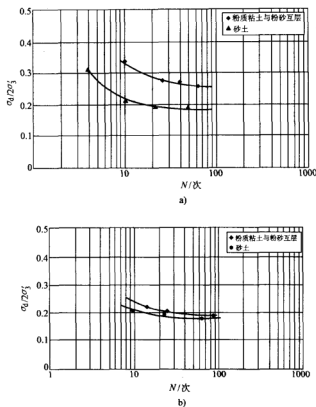


图 11-17 固结应力 $\sigma'_c = 100\text{kPa}$ 时南京粉质粘土与粉砂互层土、粉细砂动三轴试验中引起液化所需的往返应力比与往返作用次数的关系曲线的比较

表 11-1 地震震级与等效往返作用次数的关系

震级 M_L	5.5 ~ 6	6.5	7.0	7.5	8.0
等效往返作用次数 N_{eq}	5	8	12	20	30

国外通常将往返作用次数为 20 次时引起双幅轴向应变 5% 所需要的往返应力比称为土的抗液化强度, 记为 $[\sigma_d/2\sigma'_c]_{20}$ 。图 11-18 为 Silver 等总结的美国砂土液化试验结果。从图可见, 试验结果位于相当窄的带内, 表明不同试验得到的往返应力比是相当一致的。图 11-19 是 Toki 等总结的日本砂土液化试验结果。可以看出, 不同的试验结果也落在一个很窄的带内, 表明不同试验得到的往返应力比是相当一致的。

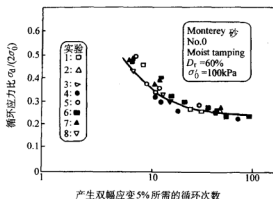


图 11-18 美国砂土液化试验结果 (silver 等, 1976)

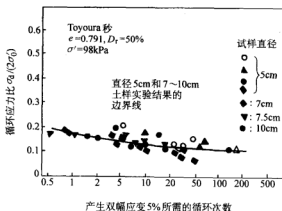


图 11-19 日本砂土液化试验结果 (Toki 等, 1986)

由于动三轴试验与现场条件存在的差异, 例如在现场条件下静止土压力系数 $K_0 \neq 1$, 往返剪应力小于最大剪应力等, 因此, 将动三轴试验得到的抗液化强度用于现场液化判别时, 应将动三轴试验得到的 $[\sigma_d/2\sigma'_v]$ 值要乘以修正系数 C_r , 但从现场条件和室内动三轴试验对比确定 C_r 值是比较困难的。De Alba 等在振动台上进行了大量的单向振动大型单剪试验, 试验得出: 动三轴试验引起初始液化所需的应力比大于振动台试验, 相对密度 $D_r = 50\%$ 、

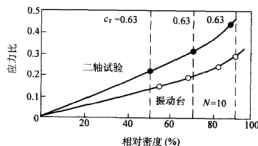


图 11-20 振动台式简切试验与动三轴试验结果的比较

70%、87%，往返应力作用次数 $N = 10$ 时， C_r 均为 0.63，如图 11-20 所示。但是，考虑到现场条件下可能的各种影响因素，如多向震动等， C_r 值应适当降低，如当振次为 $N = 2 \sim 30$ 时，可取 $C_r = 0.59 \sim 0.55$ 。

11.2.4 饱和砂土的地震液化判别

饱和砂土液化势的评价是岩土工程界十分关注的问题。国内外学者对此进行了大量的研究，提出了一系列经验和理论分析方法。这里仅介绍国内外有广泛影响的经验方法。

1. 砂土液化的初步判别

《建筑抗震设计规范》(GB5001—2001) 规定，对饱和的砂土或粉土（不含黄土），当符合下列条件之一时，可初步判别为不液化或可不考虑液化影响：

- 1) 地质年代为第四纪晚更新世 (Q_3) 及其以前时，7、8 度时可判为不液化。
- 2) 粉土的粘粒（粒径小于 0.005mm 的颗粒）含量百分率^①，7 度、8 度和 9 度分别不小于 10、13 和 16 时，可判为不液化土。
- 3) 天然地基的建筑，当上覆非液化土层厚度 d_u (m) 和地下水位深度 d_w (m) 符合图 11-21 规定时（按规范公式绘制），可不考虑液化影响。

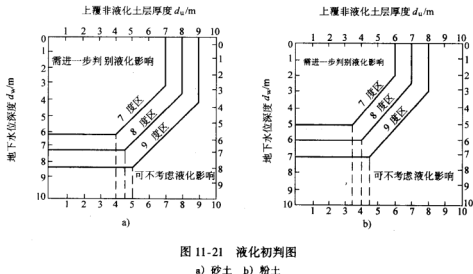


图 11-21 液化初判图

a) 砂土 b) 粉土

注：计算 d_u 时宜将淤泥和淤泥质土层扣除；确定 d_w 时可按近期内年最高水位采用；当基础埋深 $d < 2\text{m}$ 时，可直接用图 11-21 进行判别，当 $2\text{m} \leq d < 5\text{m}$ 时，

①：用于液化判别的粘粒含量系采用六偏磷酸钠作分散剂测定，采用其他方法时应按有关规定换算。

对 d_u 和 d_w 值应减去基础埋深超过 2m 深度部分后再用图 11-21 进行判别; 对 $d < 5\text{m}$ 的限制是作者认为规范公式可应用的深度。

对于经初步判别未得到满足, 即不能判为不液化时, 必须根据下述方法进行液化判别。

2. 美国砂土液化判别的 NCEER 法

这里, 将由 Seed 和 Idriss 提出、经 Youd 和 Idriss 等改进和完善了“简化方法”称为 NCEER 法。该“简化方法”是目前普遍接受的方法之一。

(1) 地震引起的等效循环应力比 CSR 地震运动在土层中引起的等效循环应力比 (Cyclic Stress Ratio, 简记为 CSR) 按式 (11-1) 计算:

$$\text{CSR} = \frac{\tau_{av}}{\sigma'_v} = 0.65 \frac{a_{\max} \sigma_v}{g \sigma'_v} r_d \quad (11-1)$$

式中 a_{\max} ——地震引起的水平向地面运动加速度峰值;

g ——重力加速度;

σ_v ——总的竖向土压力;

σ'_v ——有效竖向土压力;

r_d ——应力折减系数, 对不同土层深度, r_d 值的范围如图 11-22 所示。

Liao 和 Whitman (1986) 建议图 11-22 中的平均线用下列公式表示:

深度 $z \leq 9.15\text{m}$ 时 $r_d = 1.0 - 0.00765z$

深度 $9.15 < z \leq 23\text{m}$ 时 $r_d =$

$1.174 - 0.0267z$

深度 $23\text{m} < z \leq 30\text{m}$ 时 $r_d =$

$0.757 - 0.00857z$

(2) 饱和砂土的抗液化强度 CRR

图 11-23 是以震级 $M \approx 7.5$ 、液化或不液化场地的地震现场考察结果为依据得到的等效循环应力比 CSR 和 N_{60} 之间关系的散点图。区分液化或不液化场地的分界线即为饱和砂土的抗液化强度曲线 (Cyclic Resistance Ratio, 简记为 CRR)。

NCEER 推荐的这条 CRR 曲线适用于 $M \approx 7.5$ 的地震引起的饱和砂土液化判别。图 11-23 中细粒 (粒径小于 0.0075mm 的颗粒) 含量百分率小于 5% 的分界线, 称之为洁净砂基本曲线, CRR 可近似地用式 (11-2) 表示

$$\text{CRR}_{7.5} = \frac{1}{34 - (N_1)_{60}} + \frac{(N_1)_{60}}{135} + \frac{50}{[10(N_1)_{60} + 45]^2} - \frac{1}{200} \quad (11-2)$$

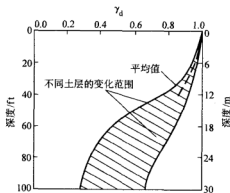


图 11-22 应力折减系数与深度的关系

式中 $(N_1)_{60}$ ——换算为有效上覆压力 $\sigma'_v = 0.1 \text{ MPa}$ 的修正标准贯入锤击数。

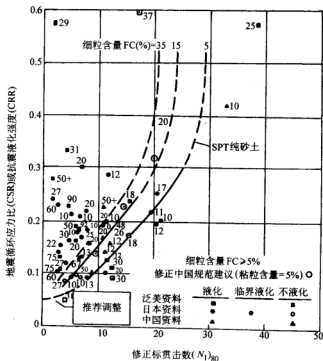


图 11-23 NCEER 建议的砂土液化判别图

另外，图中还给出了细粒含量为 15% 和 35% 的两条分界线。显然，细粒含量愈高，饱和砂土的抗液化强度亦愈高。NCEER 建议按式 (11-3) 考虑细颗粒含量 FC 对抗液化强度 CRR 的影响

$$(N_1)_{60} = \alpha + \beta (N_1)_{60} \quad (11-3)$$

式中 α 、 β ——细颗粒含量影响系数。

当 $FC \leq 5\%$ 时

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1.0$$

当 $5 < FC \leq 35\%$ 时

$$\alpha = \exp[1.76 - (190/FC^2)]$$

$$\beta = [0.99 + (FC^{1.5}/1000)]$$

当 $FC > 35\%$ 时

$$\alpha = 5.0 \quad \beta = 1.2$$

修正标准贯入锤击数 $(N_1)_{60}$ 和标准贯入锤击数 N_{60} 的换算关系如下

$$(N_1)_{60} = C_N N_{60} \quad (11-4)$$

式中 C_N ——修正标准贯入锤击数的换算系数。

NCEER 建议, C_N 值可以采用 Liao 和 Whitman (1986) 提出的式 (11-5) 进行计算

$$C_N = \sqrt{P_a / \sigma'_v} \quad (11-5)$$

或者, C_N 值按 Seed 和 Idriss (1982) 提出的式 (11-6) 进行计算

$$C_N = \frac{2.2}{1.2 + P_a / \sigma'_v} \quad (11-6)$$

NCEER 建议, 取 C_N 的最大值等于 1.7。另外, NCEER 认为, 当有效上覆压力 $\sigma'_v < 200\text{kPa}$ 时, 式 (11-5) 和式 (11-6) 的结果都是合理的; 当 $200 < \sigma'_v \leq 200\text{kPa}$ 时, 式 (11-6) 的结果更可靠一些。当 $\sigma'_v > 300\text{kPa}$, 不同研究者建议的换算系数 C_N 值离散较大, NCEER 未建议计算公式。

(3) 饱和砂土抗液化安全系数 F_s 。饱和砂土的抗液化安全系数 F_s 定义为

$$F_s = (CRR_{7.5} / CSR) \cdot MSF \cdot K_o \cdot K_a \quad (11-7)$$

式中 MSF——震级标定系数, NCEER 建议按表 11-2 确定震级标定系数 MSF 值。

对于震级小于 7.5 级的情况, NCEER 认为, 应允许工程师根据可以接受的风险水平选择合适的 MSF 值。对于震级大于 8 级的情况, 考虑到现场地震液化资料较少, NCEER 推荐了比较保守的 MSF 值。

K_o ——高有效应力修正系数;

K_a ——静剪应力修正系数。

表 11-2 震级标定系数 MSF 值

震级	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5
MSF	2.20 ~ 2.8	1.76 ~ 2.1	1.44 ~ 1.6	1.19 ~ 1.25	1.0	0.84	0.72

深层砂土的液化问题本质上是高有效上覆压力下饱和砂土的液化问题。室内往返荷载三轴试验表明, 饱和砂土的抗液化强度随固结应力的增大而提高, 两者的关系是非线性的。为了考虑固结应力对饱和砂土的抗液化强度 CRR 的影响, Seed (1983) 将按“简化方法”计算的 CRR 值乘以一个折减系数, 从而将“简化方法”外推到有效上覆压力 $\sigma'_v > 100\text{kPa}$ 的较深土层的液化判别。根据高固结应力下均等固结往返荷载三轴试验得到的抗液化强度 CRR, 以固结应力约 $\sigma'_c \approx 100\text{kPa}$ 的抗液化强度 CRR 值为基准, 对不同固结应力下的抗液化强度进行比较, 可得折减系数 K_o 与固结应力 σ'_c (有效上覆压力 σ'_v) 的关系曲线。Hynes 和 Olsen (1999) 整理和分析了折减系数的关系曲线, 并给出的表达式如下

$$k_o = (\sigma'_{v0} / p_a)^{f-1} \quad (11-8)$$

NCEER 建议, 当相对密实度 = 40% ~ 60% 时, 取 $f = 0.7 \sim 0.8$; 当相对密实

度 = 60% ~ 80% 时, 取 $f = 0.6 \sim 0.7$ 。Hynes 和 Olsen 建议将这些关系曲线作为 K_s 最小的或保守的估计值。

体积剪胀土 (低固结应力下中密和密实粗粒土) 的抗液化强度随静剪应力的增大而提高; 相反, 体积剪缩土 (松散土和高固结应力下中密土) 的抗液化强度随静剪应力的增大而降低。NCEER 认为静剪应力对抗液化强度的影响尚需要进一步研究, 未推荐供工程实践应用的修正系数 K_a 。

3. 中国《建筑抗震设计规范》的液化判别方法

《建筑抗震设计规范》规定: 当初步判别认为需进一步进行液化判别时, 应采用标准贯入试验判别法判别地下 15m 深度范围内的液化; 当采用桩基或埋深大于 5m 的深基础时, 尚应判别 15 ~ 20m 范围内土的液化。当有成熟经验时, 尚可采用其他判别方法。当饱和砂土或粉土地基满足下式要求时, 可判别为液化, 即

$$N_{63.5} < N_{cr} \quad (11-9)$$

在地面下 15m 深度范围内

$$N_{cr} = N_0 [0.9 + 0.1 (d_s - d_w)] \sqrt{3/\rho_c} \quad (11-10)$$

在地面下 15 ~ 20m 深度范围内

$$N_{cr} = N_0 (2.4 - 0.1 d_s) \sqrt{3/\rho_c} \quad (11-11)$$

式中 $N_{63.5}$ ——饱和土标准贯入锤击数实测值 (未经杆长修正);

N_{cr} ——液化判别标准贯入锤击数临界值;

N_0 ——液化判别标准贯入锤击数基准值, 应按表 11-3 采用;

d_s ——饱和土标准贯入点深度 (m);

ρ_c ——粘粒含量百分率, 当小于 3 或为砂土时, 均采用 3。

表 11-3 标准贯入锤击数基准值 N_0

设计地震分组	7 度	8 度	9 度
第一组	6 (8)	10 (13)	16
第二、三组	8 (10)	12 (15)	18

注: 括号内数值用于设计地震加速度为 0.15g 和 0.30g 的地区。

参考 NCEER 方法, 陈国兴将《建筑抗震设计规范》液化判别公式进行转换, 得到类似于 NCEER 法的抗液化强度 CRR 曲线公式, 拓宽了该规范液化判别方法的应用范围:

设计地震第一组:

$$CRR = \frac{1}{1000} (6.7 N_1 + 0.25 N_1^2) \sqrt{3/\rho_c} \quad (11-12)$$

设计地震第二、三组:

$$\text{CRR} = \frac{1}{1000} (3.6N_1 + 0.265N_1^2) \cdot \sqrt{3/\rho_c} \quad (11-13)$$

11.3 饱和粘性土的动强度

为了确定往返荷载下饱和粘性土的强度变化,可用动三轴仪进行试验研究。试验中,首先使土样固结,再在不排水条件下施加静轴向荷载,其大小等于粘性土静强度的某一百分数,待变形稳定后再施加往返轴向荷载,其幅值等于土静强度的一个指定的百分数。随着往返作用次数增加,轴向变形也增加,直到达到指定的破坏标准。饱和粘性土的动强度定义为在指定往返作用次数下使土样的轴向变形达到破坏标准所需要的轴向往返应力幅值 σ_d 与初始静轴向应力 σ_s 之和,通常也将动强度称为循环强度;而饱和粘性土的循环强度比定义为土的动强度与土的静强度 σ_f 之比值。

根据不排水剪切阶段施加于土样上的初始静轴向应力 σ_s 和往返轴向荷载幅值 σ_d 大小的关系,加载方式可分为只有大小变化的单向循环加载和同时具有方向变化的双向循环加载两种情况。在各向等压固结情况下,如图 11-24 所示,当 $\sigma_d < \sigma_s$ 时,土样在 45° 面上的剪应力只有大小的变化;当 $\sigma_d > \sigma_s$ 时,土样在 45° 面上的剪应力既有大小的变化还有方向的变化。可以想象,若 $\sigma_s = 0$,当土样处于轴向压缩和轴向拉伸时,则土样在 45° 面上产生大小相等、方向相反的往返剪应力。因此,在三轴试验条件下土样在 45° 面上的静剪应力等于 $\sigma_s/2$,而动静合剪应力等于 $(\sigma_s \pm \sigma_d)/2$ 。

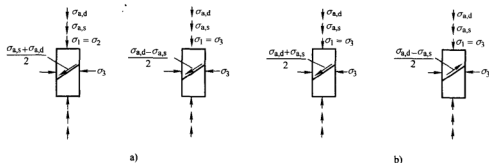


图 11-24 土样 45° 面上的剪应力

a) $\sigma_{s,s} > \sigma_{s,d}$ 单向剪切 b) $\sigma_{s,s} < \sigma_{s,d}$ 双向剪切

图 11-25 总结了加载速度对粘性土强度的影响。虽然由于一些其他因素对粘性土强度有影响,使得试验数据有些离散,但仍然存在一个一般的趋势;随着加载速度的提高,粘性土的强度提高。图 11-25 中的平均线表明,粘性土在加载持续时间为 0.25s 的瞬态加载所得到的强度大约比加载持续时间为 100s 的静荷载试

验得到的强度高 40%。

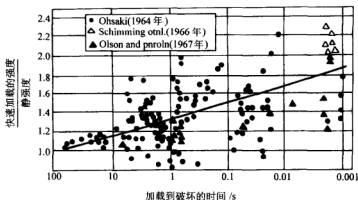


图 11-25 加载时间对粘土强度的影响

图 11-26 是在往返作用次数 $N=1$ 、加载频率为 1Hz 条件下的试验结果。因此，往返作用 1/4 周的荷载持续时间为 0.25s。由图可见，当初始静轴向应力 σ_s 为零时，则土的循环强度比近似等于 1.4。由于 $\sigma_s=0$ ，土样的动强度可由引起轴向压缩破坏的最大轴向应力来确定。这意味着加载频率为 1Hz、荷载往返 1 周所引起的土样破坏与荷载持续时间为 0.25s 的单调瞬态加载所引起的破坏实际上是等价的。可以有趣地发现，图 11-26 中 $\sigma_s=0$ 时的循环强度比和图 11-25 中荷载持续时间为 0.25s 的瞬态荷载作用下的动强度与土的静强度之比值是一致的。从图 11-26 还可看出，当初始静剪应力增大到等于土的静强度时，循环强度减小为 1.0。这可能是由于随着初始静剪应力的增加，循环剪应力的相对大小逐渐减小。因此，土样中的应力状态也就越来越接近于静荷载试验的结果。

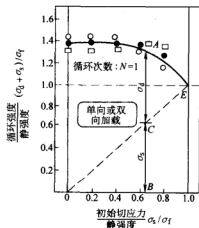


图 11-26 循环强度比与初始剪应力比的关系

图 11-27 是单向往返加载、不同往返次数的试验结果。可以看出，随着指定的荷载往返次数增加，土的循环强度逐渐降低。当荷载往返次数接近 100 次时，土的循环强度基本上等于土的静强度。图 11-28 总结了单向循环加载、荷载循环次数 $N=50$ 时各类土的试验结果。

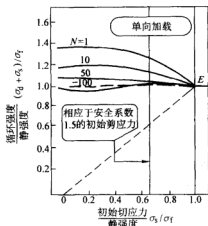
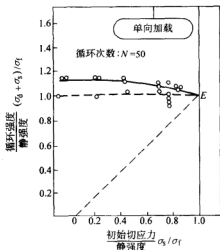


图 11-27 单向往返加载试验结果总结



11-28 循环强度与初始静剪应力的关系

图 11-29 是在不规则荷载作用下得到的试验结果。该试验用的原状粘土取自 1978 年日本 Near-Izu 地震 (震级 $M=7$) 中曾发生大规模地滑的小山坡滑动面上。

土样的塑性指数 $I_p \approx 30$, 含水率 $\omega = 110\% \sim 140\%$, 饱和度 $S_r = 85\% \sim 90\%$, 常规三轴试验测定的抗剪强度指标 $c = 48\text{kPa}$ 和 $\varphi = 17^\circ$ 。试验中的不规则荷载采用地表水平向地震加速度记录。EW 表示东西向加速度时程, NS 表示南北向加速度时程。CM 试验代表不规则荷载加载过程中压缩应力峰值为应力时程最大幅值的试验; EM 试验代表不规则荷载

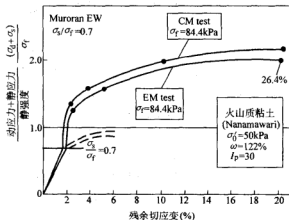


图 11-29 不规则荷载试验的剪应力—残余应变关系
加载过程中张拉应力峰值为应力时程最大幅值的试验。可以看到, 当动静轴向总应力 $(\sigma_d + \sigma_s)$ 达到土的静强度 σ_f 的 80% 时 ($\sigma_f = 84.4\text{kPa}$), 土的残余应变急剧增大; 图中还给出了初始静剪应力比 σ_s/σ_f 达到 70% 之前的静剪应力—残余应变曲线, 如果静荷载继续增加, 则可以得到图中虚线所示的静剪应力—残余应变曲线。图中还可以看出, 静动荷载作用下的应力—残余应变曲线为位于仅有静荷载作用下的应力—残余应变曲线的上方, 这表明: 土样先施加一定大小的静荷载后

再施加动荷载, 与单纯的静荷载试验条件相比, 土样具有较大的刚度和较高的强度。对于本试验中的粘土, 这种因后继动荷载作用而导致的强度提高几乎达到 100%。

图 11-30 给出了初始静应力比 $\sigma_s/\sigma_f = 70\%$ 的试验结果。虽然对不同条件的试验, 其试验结果有些离散, 但所有数据均落在一个很窄的条带内。因此, 所有试验数据可用一条平均线来表示。可以看出, 达到破坏应变所需要的循环强度比约为 1.95。

图 11-31 是初始静应力比 $\sigma_s/\sigma_f = 0.2 \sim 0.9$ 的所有试验的平均曲线。可以看出, 随着初始静剪应力比 σ_s/σ_f 从 20% 逐渐增大到 90% 时, 残余应变达到

某一水平后残余应变曲线将趋向于变得平缓。令人惊奇地发现, 即使初始静应力比 σ_s/σ_f 达到 90% 的水平, 剪应力—残余应变曲线仍然远高于静剪应力—应变曲线。从图 11-31 可得到一个重要结论: 当初始静剪应力比 $\sigma_s/\sigma_f = 0.5 \sim 0.8$ (这是斜坡下原位土层通常遇到的应力条件) 时, 初始剪应力的大小对剪应力—残余应变曲线没有明显的影响。因此, 初始静剪应力对动应力—应变关系的影响可以用 $\sigma_s/\sigma_f = 0.7$ 的试验结果来代表。图 11-32a 和 11-32b 分别是各向等压固结应力 $\sigma'_c = 20\text{kPa}$ 和 $\sigma'_c = 80\text{kPa}$ 的一系列试验结果。根据全部试验结果, 可以给出一条合理的平均曲线。对于 $\sigma'_c = 20\text{kPa}$ 的情况, 土的循环强度比约为 2.15; 对于 $\sigma'_c = 80\text{kPa}$ 的情况, 土的循环强度比约为 1.65。为了比较目的, 现将

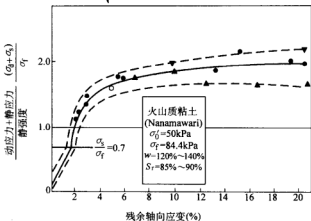


图 11-30 剪应力—残余应变关系

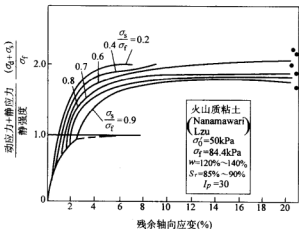


图 11-31 初始静剪应力对剪应力—残余应变关系的影响

$\sigma'_c = 20\text{kPa}$ 、 50kPa 和 80kPa 的试验结果的平均曲线重绘于图 11-33。

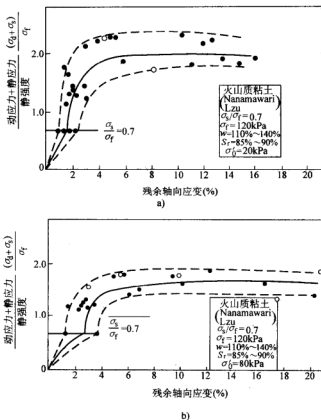


图 11-32 不同围压下剪应力—残余应变关系曲线

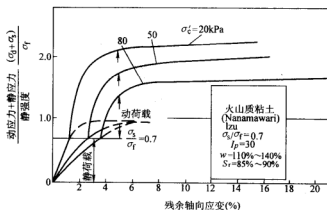


图 11-33 固结压力对剪应力—残余应变关系的影响

11.4 饱和土振动孔隙水压力的增长规律

动荷载作用下土中孔隙水压力的发展与消散是土体变形和强度变化的根本原因,也是用有效应力法分析土体动力稳定性的关键。因此,土体振动孔隙水压力的发生、增长和消散的研究一直是土动力学的重要内容之一。至今,国内外学者已经提出了考虑不同因素的多种振动孔隙水压力计算模型,如应力模型、应变模型、内时模型、能量模型、有效应力路径模型及瞬态模型等。这里,简要介绍几种典型的模型。

1. 饱和砂土振动孔隙水压力计算的应力模型

这类模型的一个共同特点是将饱和砂土振动孔隙水压力与施加的应力联系起来,通常把振动孔隙水压力表为往返应力幅值和往返作用次数的函数。Seed 等根据饱和砂土试样在均等固结不排水条件下的动三轴试验资料,提出了一种计算平均振动孔隙水压力的应力模型(图 11-34),在土体等向固结时表示为

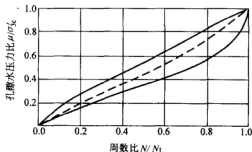


图 11-34 Seed 等提出的饱和砂土振动孔隙水压力增长规律曲线

$$\frac{u}{\sigma'_c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left[2 \left(\frac{N}{N_L} \right)^{1/\theta} - 1 \right] \quad (11-14)$$

式中 u ——平均振动孔隙水压力;

σ'_c ——有效固结应力;

N_L ——达到初始液化时周期荷载的往返作用次数;

N ——周期荷载的往返作用次数;

θ ——与土性有关的试验常数。Seed 认为,一般可取 $\theta = 0.7$ (相当于图 11-34 中的虚线)。

在非均等固结时,有时无法确定出土体初始液化时的往返作用次数 N_L , 因此,常用平均振动孔隙水压力达到侧向固结应力一半时的往返作用次数 N_{50} 来代替 N_L 。为此, Finn 把式 (11-14) 推广到非均等固结的情况,将式 (11-14) 修正为

$$\frac{u}{\sigma'_{3c}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left[2 \left(\frac{N}{N_{50}} \right)^{1/\theta} - 1 \right] \quad (11-15)$$

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 K_c \quad (11-16)$$

$$K_c = \sigma'_{1c} / \sigma'_{3c} \quad (11-17)$$

式中 σ'_{3c} ——侧向固结应力；

N_{50} ——平均振动孔隙水压力达到 $0.5\sigma'_{3c}$ 时的往返作用次数；

α_1 、 α_2 ——与土性有关的系数。

徐志英将式 (11-14)、式 (11-15) 简化为
等压固结

$$\frac{u}{\sigma'_c} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{N}{N_L} \right)^{\frac{1}{2\theta}} \quad (11-18)$$

非等压固结

$$\frac{u}{\sigma'_{3c}} = \frac{2}{\pi} \left(1 - m \frac{\tau_0}{\sigma'_{3c}} \right) \arcsin \left(\frac{N}{N_L} \right)^{\frac{1}{2\theta}} \quad (11-19)$$

孔隙水压力应力模型是基于室内等幅应力动三轴试验资料建立的，而现场动应力幅值的变化是很复杂的，不可能维持等幅应力条件。因此，将这样建立的孔隙水压力应力模型用来计算地震运动作用下土体的孔隙水压力，会有一定的误差。此外，在排水条件下，该方法只能计算出孔隙水压力消散后的体积残余变形而无法计算出形状残余变形，而且无法解释偏应力发生卸荷时引起孔隙水压力增长的现象，即不能反映土的反向剪缩特性。

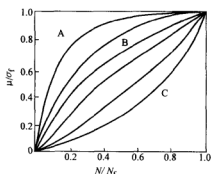


图 11-35 张建民等提出的振动孔隙水压力增长规律曲线

张建民等认为，饱和砂土在往返荷载作用下平均振动孔隙水压力的增长规律可分为 A、B 和 C 三种类型（图 11-35），分别可用下列模型描述：

$$A \text{ 型: } u = u_f \left[1 - \exp \left(-\beta \frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (11-20)$$

$$B \text{ 型: } u = \frac{2}{\pi} u_f \arcsin \left(\frac{t}{t_f} \right)^{\frac{1}{2a}} \quad (11-21)$$

$$C \text{ 型: } u = u_f \left[\frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\pi \frac{t}{t_f} \right) \right) \right]^b \quad (11-22)$$

式中 β 、 a 、 b ——计算参数；

u_f ——平均振动孔隙水压力发展至稳定时的值；

t_f ——与 u_f 对应的持续时间；

u ——与往返荷载作用时间 t 对应的平均振动孔隙水压力。

陈国兴等对饱和的南京粉细砂、南京粉质粘土与粉砂互层土在等压固结和偏

压固条件下进行了动三轴试验研究, 结果表明: 在等压固结条件下, 南京粉细砂的振动孔隙水压力发展规律可用 Seed 等建议的式 (11-14) 进行描述, 但 $\theta = 2.352$, 而 Seed 等建议的 $\theta = 0.7$, 这说明南京粉细砂与一般砂土的平均振动孔隙水压力发展规律的差别比较大; 而在偏压固结条件下, 南京粉细砂的振动孔隙水压力发展规律可用双曲线模型进行描述, 即

$$u/u_f = \frac{N/N_f}{a + b (N/N_f)} \quad (11-23)$$

式中 u_f ——达到初始液化时的平均振动孔隙水压力;

N_f ——相应于初始液化时的往返作用振数;

a 、 b ——试验参数。当固结比 $K_c = 1.5$ 时, $a = 0.107$, $b = 0.905$ 。

对南京粉质粘土与粉砂互层土, 不论是等压固结还是偏压固结, 其振动孔隙水压力的发展规律均可采用双曲线模型进行描述, 当等压固结时, $a = 0.265$ 和 $b = 0.748$; 当偏压固结时 ($K_c = 1.5$), $a = 0.299$ 和 $b = 0.735$ 。

2. 饱和砂土振动孔隙水压力计算的应变模型

应变模型将平均振动孔隙水压力与某种应变结合起来。这类模型中最著名的是 Martin-Finn-Seed 根据排水和不排水往返剪切试验结果, 认为不排水条件下的平均振动孔隙水压力等于排水时永久体积变形与回弹模量的乘积 (图 11-36), 即

$$\Delta u = E_r \Delta \epsilon_{vd} \quad (11-24)$$

$$E_r = \frac{(\sigma'_v)^{1-m}}{mk_0 (\sigma'_v)^{n-m}} \quad (11-25)$$

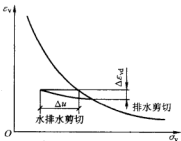


图 11-36 Martin-Finn-Seed 模型示意图

$$\Delta \epsilon_{vd} = C_1 (\gamma - C_2 \epsilon_{vd}) + \frac{C_3 \epsilon_{vd}^2}{\gamma + C_4 \epsilon_{vd}} \quad (11-26)$$

式中

$\Delta \epsilon_{vd}$ ——一个应力循环所引起的塑性体积应变;

ϵ_{vd} ——累积压缩体积应变;

γ ——剪应变;

E_r ——有效应力为 σ'_v 时的回弹模量;

σ'_{v0} ——初始有效应力;

k_0 、 m 、 n ——由不同大小 σ'_v 的卸荷曲线确定的试验参数;

C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 ——由排水往返剪切试验确定的试验参数。

平均振动孔隙水压力的应变模型可以在一定程度上解决应力模型中出现的矛盾, 并且直接和动力分析中的应变幅值联系起来, 是目前振动孔隙水压力发展规

律研究的一个重要方向。应该指出,用 Martin-Finn-Seed 模型计算饱和砂土孔隙水压力增长的方法,并不真正反映孔隙水压力的发展机理,原则上只适用于静力上处于压缩状态、在动力上处于剪切或纯剪切状态的土体。

3. 饱和粘性土振动孔隙水压力的增长规律

周期荷载作用下饱和粘性土平均振动孔隙水压力的发展规律已有多种模型。Yasuhara 给出了计算饱和粘性土平均振动孔隙水压力发展规律的双曲线模型,即

$$\frac{u}{\sigma'_c} = \frac{\epsilon}{a + b\epsilon} \quad (11-27)$$

式中 u ——平均振动孔隙水压力;

ϵ ——轴向应变幅值;

σ'_c ——有效固结应力;

a 、 b ——土的试验参数。

Matsui 根据试验结果,认为饱和粘性土的平均振动孔隙水压力与最大单幅往返剪应变之间存在对数型函数关系,其表达式如下

$$\frac{u}{\sigma'_c} = \beta \lg \frac{\gamma_d}{A(OCR - 1) + B} \quad (11-28)$$

式中 β 、 A 、 B ——土的试验参数;

γ_d ——最大单幅往返剪应变;

OCR ——土的超固结比。

Hyde 基于应力控制式低频往返荷载对重塑粉质粘土的试验表明,认为平均振动孔隙水压力增长速率是往返作用次数、应力水平和土样应力历史的函数,提出了如下的函数关系式

$$\frac{\dot{u}}{\sigma'_c} = \alpha N^\beta \quad (11-29)$$

式中 \dot{u} ——振动孔隙水压力;

N ——往返作用次数;

α 、 β ——土的试验参数,其中, α 可表达为偏应力水平的函数:

$$\lg \alpha = A + Bq'_i/\sigma'_c \quad (11-30)$$

式中 q'_i/σ'_c ——偏应力水平;

A 、 B ——土的试验参数。

对式 (11-29) 两边进行积分,可得

$$\frac{u}{\sigma'_c} = \frac{\alpha}{1 + \beta} (N^{1+\beta} - 1) + \alpha \quad (11-31)$$

该模型考虑了应力历史的影响,认为不同超固结比土样的振动孔隙水压力增长规律都符合上述各式,只是参数 β 、 A 和 B 均随超固结比 OCR 值的变化而

变化。

11.5 土的动力本构关系

11.5.1 土的动力应力应变关系的基本特性

土在动荷载作用下的变形常常包括弹性变形和塑性变形两部分。当动荷载较小时,主要表现为弹性变形,而当动荷载增大时,塑性变形逐渐产生和发展。因此,当土体在小应变幅情况下工作时,土将呈现出近似弹性体的特征。这种小应变的动力应力应变关系控制了波在土中的传播速度;但是,当动应变增大时,动荷载将会引起土的结构改变,从而引起土的永久变形和强度的损失,使土的动力特性将明显不同于小应变幅的情况。

对于小应变幅的情况(轴向应变或剪应变小于 10^{-4}),一般只要研究动切变模量和阻尼比的变化规律,为动力分析提供土的动力参数;但在大应变幅情况下,除了需研究动切变模量和阻尼比的变化规律外,还必须研究土的动强度和变形问题。由于土具有明显的各向异性(结构各向异性、应力历史的各向异性),加上土中水的影响,使土的动力应力应变关系极为复杂。土在动荷载作用下不仅具有弹塑性的特点,而且还有粘性的特点,可将土视为弹性、塑性和粘滞性的粘弹塑性体。描述土的动力应力应变关系,必须对土的非线性、滞后性、变形积累三方面的特性均有较深入的了解。

1. 非线性

土的非线性可以从土的动力应力应变骨干曲线的实测资料反映出来,如图 11-37 所示。骨干曲线是受同一固结结应力的土在不同动应力($\sigma_d = \sigma_m \sin \omega t$)作用下每一周应力应变关系曲线滞回圈顶点的连线。骨干曲线的非线性反映了土的等效动变形模量的非线性。

2. 滞后性

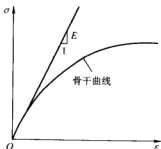


图 11-37 土的动力应力应变骨干曲线

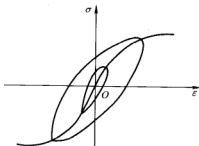


图 11-38 土的动力应力应变滞回曲线

土的动应力应变关系中的滞回圈反映了应变的滞后性，表现出土的粘性特性。从图 11-38 可以看出，由于阻尼的影响，动应力与应变的最大值并不是同步出现的，动应变滞后于动应力。

3. 变形累积性

由于土体在受荷过程中会产生不可恢复的塑性变形，这一部分变形在往返荷载作用下会逐渐积累。从图 11-39 可见，即使荷载大小不变，随着荷载作用往返次数的增加，变形愈来愈大，滞回圈中心不断朝一个方向移动。滞回圈中心的变化反映了土对往返荷载作用的积累效应，它产生于土的塑性即荷载作用下土的不可恢复的结构破坏。变形的积累效应也包含了动应力应变的影响。

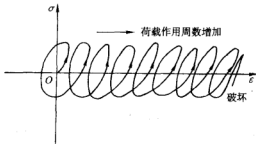


图 11-39 变形的积累效应

土的动应力应变关系，并不是简单地表现为这三个特性的组合。土的各种特性之间有着特定的依赖关系。就简单问题而言，可以将这三者分别加以考虑得到土的动本构关系，它可以在一定范围内取得足够精确的结果。对于复杂问题而言，必须将这三者联合考虑，才能得到满意的解答。

11.5.2 土的动弹塑性模型

当动应力 σ_d 为正弦周期荷载时，粘弹性土体的滞回曲线应为一椭圆曲线。然而，由于土骨架很弱，在动应力作用下会发生塑性变形。因此，滞回曲线所围成的面积包括粘性和塑性能量损耗两部分。在本质上，粘性能量损耗是与变形速度有关的，而塑性能量损耗是与塑性变形有关的。因此，土的阻尼也是由两部分组成的，一部分是粘性阻尼，另一部分是塑性历程阻尼。由于土存在塑性，其滞回曲线实际上并不是标准的椭圆曲线。在地震运动作用下，土通常处于弹塑性变形阶段。因此，用弹塑性模型描述地震时土的应力应变关系更为合适。

1. 双曲线模型

一般地，用 Kondner 和 Hardin 所给出的双曲线来描绘土的应力应变关系的骨干曲线，如图 11-40 所示，即

$$\tau = f(\gamma) = \frac{\gamma}{a + b\gamma} \quad (11-32)$$

式中 a 、 b ——土的试验参数。

显然， $1/a$ 是骨干曲线在原点的斜率，记 $G_0 = 1/a$ ； $1/b$ 是骨干曲线的水平渐近线在纵轴上的截距，记为 $\tau_f = 1/b$ 。定义

$$\gamma_r = \tau_r / G_0 \quad (11-33)$$

称 γ_r 为参考剪应变, 其含义见图 11-40。

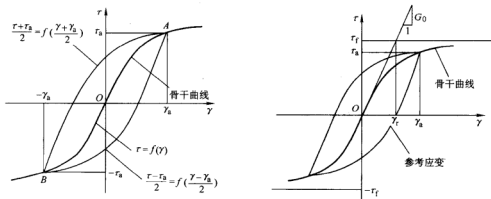


图 11-40 骨干关系和滞回圈构造方法示意图

此时, 式 (11-32) 也可用下式表示

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \gamma / \gamma_r} \quad (11-34)$$

假定在 A 点发生反向加载, 卸荷时的应力应变关系分支曲线可用式 (11-35) 表示

$$\frac{\tau - \tau_a}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_a}{2}\right) \quad (11-35)$$

则根据双曲线骨干曲线表达式可以得到

$$\tau = \tau_a + \frac{G_0 (\gamma - \gamma_a)}{1 - \frac{\gamma - \gamma_a}{2\gamma_r}} \quad (11-36)$$

假定在 B 点再次发生反向加载, 再加荷时的应力应变关系分支曲线可用下式表示

$$\frac{\tau + \tau_a}{2} = f\left(\frac{\gamma + \gamma_a}{2}\right) \quad (11-37)$$

则根据双曲线骨干曲线表达式可以得到

$$\tau = -\tau_a + \frac{G_0 (\gamma + \gamma_a)}{1 + \frac{\gamma + \gamma_a}{2\gamma_r}} \quad (11-38)$$

通常, 将上述通过骨干曲线的坐标原点平移、旋转 180° 和放大两倍来构造卸

荷一再加荷应力应变关系分支曲线的方法称为 Masing 法则。这些规定是针对等幅往返周期荷载而言的, 实际的地震运动引起的往返应力并非等幅的, 构造不规则的地震往返应力作用下卸荷一再加荷应力应变关系分支曲线的方法要复杂得多。其中一个问题是, 如果在 (τ_a, γ_a) 卸荷后并没有达到 $(-\tau_a, -\gamma_a)$ 就重新加荷, 应力应变点应当遵循什么规则前进呢?

Finn 等从土的不规则试验中总结出一条新的规则——“外大圈”规则: 如果应力应变点从 (τ_a, γ_a) 卸荷后再加荷, 应力应变点没有达到 $(-\tau_a, -\gamma_a)$, 这时, 该再加荷曲线与从 $(-\tau_a, -\gamma_a)$ 出发的再加荷曲线具有相同的形式; 如果这一再加荷曲线与初始骨干曲线相交, 则应力应变点沿骨干曲线前进, 称这为“上骨干曲线”准则。如果这一再加荷曲线与从 $(-\tau_a, -\gamma_a)$ 出发的再加荷曲线相遇, 则应力应变点沿从 $(-\tau_a, -\gamma_a)$ 发生的再加荷曲线前进, 称这为“上大圈准则”。图 11-41 形象地表示了这一规则。相应地, 有“下骨干曲线”准则和“下大圈准则”, 与上述“上大圈准则”一起统称为“外大圈”准则。

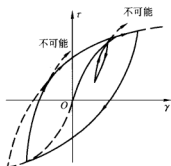


图 11-41 上大圈准则示意图

2. 考虑骨干曲线衰退的修正双曲线模型

Matasovic 等根据饱和和砂土往返荷载试验结果, 提出土的初始滞回圈和任意后续滞回圈之间的关系可用图 11-42 来表示。假设从第 2 周起的后续滞回圈用衰退骨架曲线和 Masing 法则来描述, 则土的往返衰退特性可以对初始骨架曲线的纵坐标加以折减得到后续骨架曲线的纵坐标的方式来表达。此初始骨架曲线为

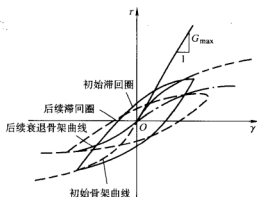


图 11-42 初始循环和后续循环的应力应变关系

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \psi (\gamma/\gamma_r)^s} \quad (11-39)$$

式中 ψ 、 s ——土的试验参数, 用以调节骨架曲线纵坐标的位置和曲线曲率。

对无粘性或少粘性的可液化土, 其骨架曲线的衰退可以认为是由于振动孔隙水压力的发展所引起的。因此, 骨架曲线的衰退特性可根据振动孔隙水压力的减小对 G_0 、 τ_r 的折减来描述, 即衰退后的 G_0^* 、 τ_r^* 取为

$$G_0^* = G_0 (1 - u^*)^n \quad (11-40)$$

$$\tau_0^* = \tau_0 (1 - (u^*)^\mu) \quad (11-41)$$

式中 u^* ——振动孔压比；

n 、 μ ——土的试验参数。

此时，土的动态参考剪应变 γ_r^* 可表示为

$$\gamma_r^* = \frac{\tau_0^*}{G_0^*} = \frac{\tau_0 (1 - (u^*)^\mu)}{G_0 (1 - u^*)^n} = \gamma_r \frac{1 - (u^*)^\mu}{(1 - u^*)^n} \quad (11-42)$$

则后续衰退骨架曲线可表示为

$$\tau = \frac{G_0^* \gamma}{1 + \phi (\gamma/\gamma_r^*)^s} \quad (11-43)$$

11.5.3 等效非线性粘弹性模型

等效非线性粘弹性模型就是将土视为粘弹性体，采用等效弹性模量 E 或切变模量 G 和等效阻尼比 λ 来反映土的动应力应变关系的非线性与滞后性，并且将模量与阻尼比表示为动应变幅的函数。这种模型具有概念明确、应用方便的优点；但是，不能反映土的变形积累。

类似于线性粘弹性模型对弹性模量的定义，土的非线性变形特性可以用割线模量来描述，如图 11-43 所示，割线切变模量 G 定义为：

$$G = \frac{\tau_a}{\gamma_a} = \frac{F(\gamma_a)}{\gamma_a} \quad (11-44)$$

式中 τ_a 、 γ_a ——应力和应变的幅值。

阻尼比定义为

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (11-45)$$

式中 W ——弹性应变能，其大小等于图 11-43 中的三角形面积，即

$$W = \frac{1}{2} \gamma_a f(\gamma_a) = \frac{1}{2} \gamma_a \tau_a \quad (11-46)$$

ΔW ——一个应力循环中的能量损耗，其大小等于图 11-43 中的滞回圈面积。

由于图 11-43 中半月弧形截面 ABE 与 AOC 具有相同的形状，因此，半月弧形截面 ABE 的面积应是半月弧形截面 AOC 的面积的四倍。因而，在剪应变幅值为 γ_a 的一个应力循环中的能量损耗 ΔW 为

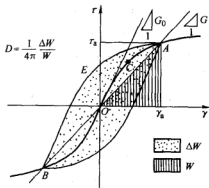


图 11-43 等效非线性粘弹性模型中弹性应变能、损耗能量和割线剪切模量的定义

$$\Delta W = 8 \left(\int_0^{\gamma_s} f(\gamma) d\gamma - W \right) \quad (11-47)$$

将式 (11-46) 和式 (11-47) 代入式 (11-45) 可得到

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 \int_0^{\gamma_s} f(\gamma) d\gamma}{\gamma_s f(\gamma_s)} - 1 \right) \quad (11-48)$$

对于双曲线模型, 将式 (11-34) 代入式 (11-44)、式 (11-48) 可分别得

$$G = \frac{G_0}{1 + \gamma_s / \gamma_r} \quad (11-49)$$

$$\lambda = \frac{4}{\pi} \left[1 + \frac{1}{\gamma_s / \gamma_r} \right] \left[1 - \frac{\ln(1 + \gamma_s / \gamma_r)}{\gamma_s / \gamma_r} \right] - \frac{2}{\pi} \quad (11-50)$$

将式 (4-49) 代入式 (4-48), 则式 (4-48) 也可以改写为

$$\lambda = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - G/G_0} \left[1 - \frac{G/G_0}{1 - G/G_0} \ln \frac{G_0}{G} \right] - \frac{2}{\pi} \quad (11-51)$$

图 11-44 给出了式 (11-51) 计算的 λ 与 G/G_0 的关系, 同时给出了试验资料的近似范围。可以看出, 在小应变范围内, 该模型计算的阻尼比 λ 值与试验值是吻合的; 但随着剪应变的增大, 该模型将过高地估计阻尼比 λ 值。

双曲线模型虽然简单, 但拟合模量比 G/G_0 的试验结果时仅有一个参数 γ_r 可调, 不论砂土还是粘性土, 有时拟合效果有较大差异。因此, Martin 等为了更好地适用于各类土, 且方便、简单, 采用 Davidenkov 模型描述土的剪应力与剪应变的关系, 据此可得到模量比 G/G_0 的表达式如下

$$G = G_0 \left(1 - \left[\frac{(\gamma_s / \gamma_r)^{2B}}{1 + (\gamma_s / \gamma_r)^{2B}} \right]^A \right) \quad (11-52)$$

式中 γ_r 、 A 和 B ——土性试验参数。

对于阻尼比 λ , 不论是采用双曲线模型、还是 Davidenkov 模型, 对试验结果的拟合均不理想, 故工程上经常采用如下的经验公式

$$\lambda = \lambda_{\max} (1 - G/G_0)^m \quad (11-53)$$

式中 λ_{\max} ——土的最大阻尼比;

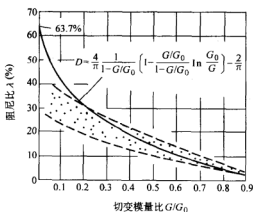


图 11-44 阻尼比和剪切模量比的关系

m ——形状系数。对大多数土, $m = 0.2 \sim 1.2$ 。

11.5.4 土的动切变模量和阻尼比的经验估计

目前在场地震反应分析、土工构筑物的地震稳定性评价、土—结构动力相互作用分析和近海场地地震稳定性评估中, 大多数是采用等效非线性粘弹性模型考虑土的非线性特性。通常, 该模型可以用一个参数和两条曲线表示: 最大动切变模量 G_0 、割线动切变模量 G 和阻尼比 λ 随剪应变幅值 γ_a 变化的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线和 $\lambda-\gamma_a$ 曲线。它们的选择是否符合实际情况对计算结果的可靠性有重要影响。

1. 最大动切变模量 G_0

确定 G_0 有两条途径, 一是利用室内试验建立的经验关系, 二是利用现场剪切波速测试结果。根据波动理论, G_0 可按式 (11-54) 确定

$$G_0 = \rho V_s^2 \quad (11-54)$$

式中 ρ ——土的质量密度;

V_s ——土的剪切波速度。

2. $G/G_0-\gamma_a$ 和 $\lambda-\gamma_a$ 关系的经验曲线

Seed 和 Idriss 建议的无粘性土 (砂土、粉土和砾石) 的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线, 如图 11-45 所示。一般认为, 它可以代表大多数砂土的动切变模量衰退关系, 这一成果已纳入美国“核安全有关结构抗震设计标准”。Seed 等的研究表明, 砾石的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线与砂土的非常类似, 只是砾石的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线稍为平缓, 但差异较小。Kokusho 给出的日本标准砂的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线如图 11-46 所示。此外, Kokusho 的试验还表明, 固结应力 σ'_c 对砂土的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线形状有一定影响, 固结应力 σ'_c 越大, G/G_0 随 γ_a 增大而减小的速度越慢, 亦即, 在同样的剪应变幅值下, 固结应力 σ'_c 越大, G/G_0 值也越大, 如图 11-47 所示。

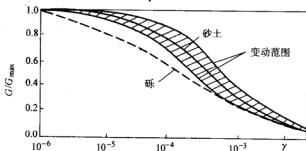


图 11-45 Seed 和 Idriss 建议的无粘性土 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线

$G/G_0-\gamma_a$ 曲线与砂土的非常类似, 只是砾石的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线稍为平缓, 但差异较小。Kokusho 给出的日本标准砂的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线如图 11-46 所示。此外, Kokusho 的试验还表明, 固结应力 σ'_c 对砂土的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线形状有一定影响, 固结应力 σ'_c 越大, G/G_0 随 γ_a 增大而减小的速度越慢, 亦即, 在同样的剪应变幅值下, 固结应力 σ'_c 越大, G/G_0 值也越大, 如图 11-47 所示。

Vucetic 等给出了不同塑性指数 I_p 值的 $G/G_0-\gamma_a$ 平均曲线, 如图 11-48 所示, 其中 $I_p = 0$ 的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线与 Seed 等建议的无粘性土的曲线是一致的。

陈国兴等对长江下游地区南京、苏州、常州、无锡、镇江、张家港、启东、常熟、江阴等 15 个城市的七类新近沉积土共计 275 个原状土样进行共 (自) 振

柱试验研究, 给出了长江下游地区七类新近沉积土的动切变模量比 G/G_{\max} 随剪应变幅值 γ_a 变化的拟合曲线、 envelop 线, 如图 11-49 所示, 其拟合参数见表 11-4。

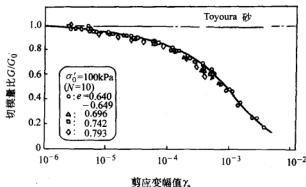


图 11-46 日本标准砂的 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线

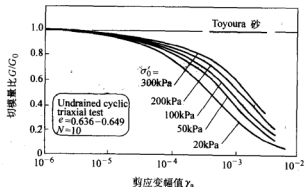


图 11-47 有效固结应力 σ'_0 对 $G/G_0-\gamma_a$ 曲线的影响

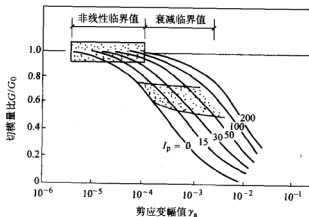


图 11-48 Vucetic 建议的 $G/G_0-\gamma_a$ 平均曲线

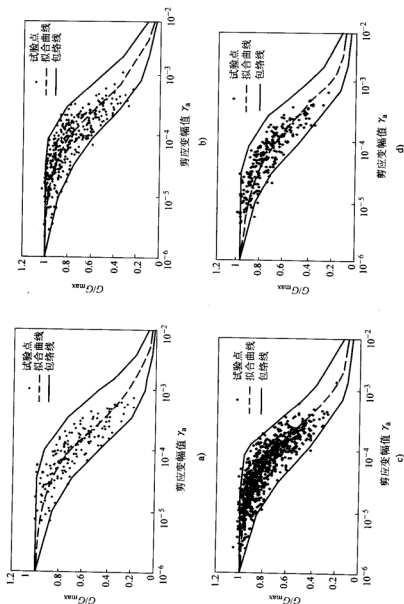


图 11-49 长江下游地区各类新近沉积土的 $G/G_{\max} - \gamma_a$ 关系平均线的拟合曲线和包络线
a) 淤泥质粉质粘土 b) 粘土 c) 粉质粘土
d) 粉质粘土与粘土互层土

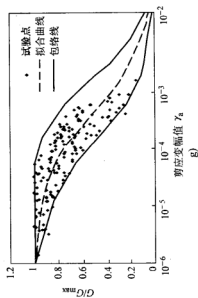
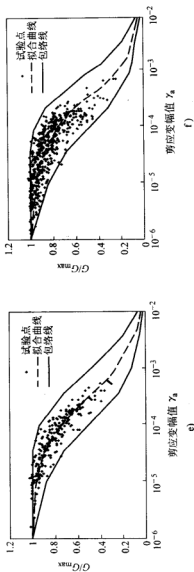


图 11-49 长江下游地区各类新近沉积土的
 $G/G_{max} - \gamma_a$ 关系平均线的拟合曲线和包络线(续)
 e) 粉土 f) 粉细砂 g) 粗砂

表 11-4 长江下游地区各类新近沉积土 G/G_{\max} — γ_s 曲线 Davidenkov 模型的拟合参数

土类	拟合参数	A	B	$\gamma_0/10^{-4}$	λ (%)
淤泥质粉质粘土		1.01	0.414	2.7	22.9
粘土		1.14	0.469	4.4	25.7
粉质粘土		1.10	0.449	3.5	24.8
粉质粘土粉土互层土		1.07	0.379	3.7	24.1
粉土		1.03	0.472	3.5	23.1
粉细砂		1.00	0.476	3.4	20.4
粗砂		1.00	0.405	2.7	19.8

土的阻尼比 λ 主要受土的类型和应变水平的影响。Seed 等建议的砂土的 λ —

γ_s 关系曲线如图 11-50 所示,

这一成果也纳入了美国“核安

全有关结构抗震设计标准”。

Kokusho 给出的日本标准砂的

λ — γ_s 关系曲线如图 11-51 所

示;同时,给出了不同固结应力水平下

λ — γ_s 关系的试验结果,如图 11-52 所示。可以看出,

固结应力 σ'_c 越大,砂土的

阻尼比越低。Seed 等也认为,

固结应力越大,砂土的阻尼比

越低。粘性土的阻尼特性更加

复杂, Vucetic 等给出了粘性土不同

I_p 值的 λ — γ_s 平均曲线,如图 11-53 所示,

其中 $I_p = 0$ 的曲线相当于 Seed

等给出的无粘性土的 λ — γ_s 曲

线;Seed 等给出了粘性土 λ —

γ_s 曲线的变化范围,如图 4-54

所示。陈国兴等给出的长江下

游地区各类新近沉积土的阻尼

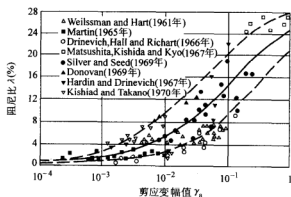
比 λ — γ_s 曲线的试验结果如图

11-55 所示,图中给出了拟合

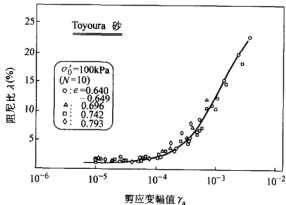
曲线及包络线,式 (11-53) 中

的形状系数 m 取 1.0, λ_{\max} 的

推荐值见表 11-4。

图 11-50 Seed 建议的砂土的 λ

— γ_s 关系曲线

图 11-51 日本标准砂的 λ — γ_s 关系曲线

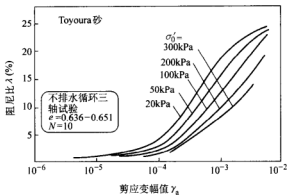


图 11-52 Kokusho 给出的有效固结应力 σ'_c 对 $\lambda-\gamma_a$ 曲线的影响

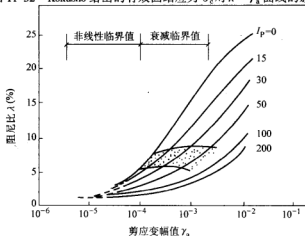


图 11-53 Vucetic 给出的不同 I_p 值的 $\lambda-\gamma_a$ 曲线

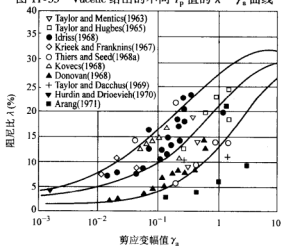


图 11-54 Seed 给出的粘性土 $\lambda-\gamma_a$ 曲线

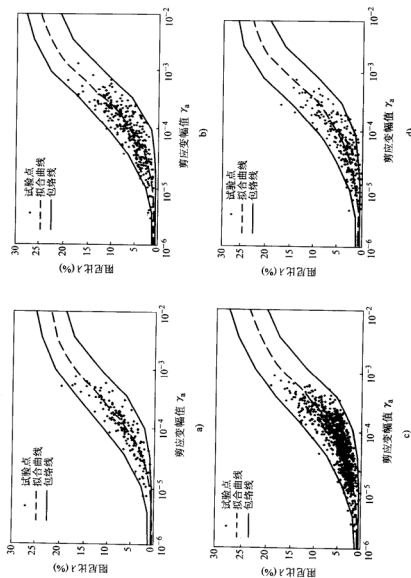


图 11-55 长江下游地区新近沉积土的 $\lambda - \gamma_a$ 关系的拟合曲线和包络线
a) 淤泥质粉质粘土 b) 粘土 c) 粉质粘土 d) 粉质粘土与粉土互层土

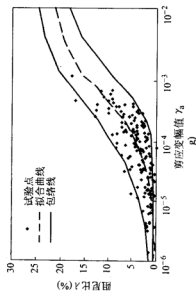
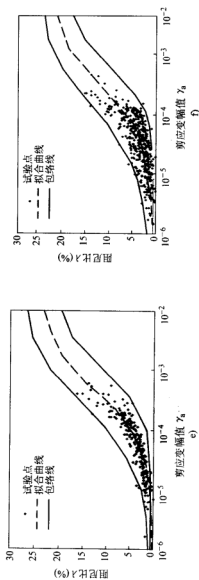


图 11-55 长江下游地区新近沉积土的 $\lambda - \gamma_a$ 关系的拟合曲线和包络线(续)

e) 粉土 f) 粉细砂 g) 粗砂

参 考 文 献

- 1 Casagrande A. Characteristics of slopes and earth fill. Journal of Boston Society of Civil Engineering, 1936
- 2 汪闻韶. 土的动强度和液化特性. 北京: 中国电力出版社, 1997
- 3 Castro G., Poulos J. Factors affecting liquefaction and cyclic mobility. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1977(6)
- 4 Poulos J., Castro G. and France J. W. Liquefaction evaluation procedure. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1985(6)
- 5 Seed H. B., Lee K. L. Liquefaction of saturated during cyclic loading. Journal of SMFD, ASCE, 1966(6)
- 6 Anderson K. H. et al. Cyclic and static laboratory tests on Drammen clay. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1980(5)
- 7 Matsui T. et al. Cyclic stress-strain history and shear characteristics of clay. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1980(10)
- 8 Bjerrum L. Geotechnical problems involved in foundations of structure in the North Sea. Geotechnique, 1973(3)
- 9 Anderson K. H., Lauritzen R. Bearing capacity for foundations with cyclic loads. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1988(5)
- 10 Huang Wenxi. Investigation on stability of saturated soil foundation and slope against liquefaction. In: Proc. 5th Int. Conf. of SMFE. 1961
- 11 Seed, H. B., Idriss, I. M. and Arango, I. Evaluation of liquefaction potential using field performance data. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1983(3)
- 12 Youd, T. L., Idriss, I. M. et al. Liquefaction resistance of soils: summary report from the 1996 NCEER and 1998 NCEER/NSF workshops on evaluation of liquefaction resistance of soils. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 2001(8)
- 13 Osaki, Y. Niigata earthquakes, 194, building damage and soil conditions. Soils and Foundations, 1966(2)
- 14 Amini, F. and Qi, G. Z. Liquefaction testing of stratified silty sands. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 2000(3)
- 15 Seed H. B., Idriss I. M. Evaluation of liquefaction potential using performance data. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1983(3)
- 16 Dobry, R. and Alvarez, L. Seismic failures of Chilean tailings dams. Journal of SMFD, ASCE, 1967(3)
- 17 Seed H. B. Soil liquefaction and cyclic mobility evaluation for level ground during earthquakes. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1979(2)
- 18 陈国兴, 刘雪珠, 庄海洋. 南京粉质粘土与粉砂互层土及粉细砂的抗震液化性能试验研究. 防灾减灾工程学报, 2003(3)
- 19 Seed, H. B. and Idriss, I. M. Simplified procedure for evaluation soil liquefaction potential. Journal of SMFD, ASCE, 1971(9)
- 20 谢君斐. 关于修改抗震规范砂土液化判别式的几点意见. 地震工程与工程振动, 1984(2)

- 21 陈国兴,张克绪,谢君斐. 液化判别的可靠性研究. 地震工程与工程振动,1991(2)
- 22 Ishihara, K. Liquefaction and flow failure during earthquake. Geotechnique, 1993(3)
- 23 The Committee on Soil Dynamics of Geotechnical Engineering Division, ASCE. Definition of terms related to liquefaction. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1979 (9)
- 24 汪闻韶. 土工抗震研究进展. 岩土工程学报, 1993(6)
- 25 Castro, G. . Liquefaction and cyclic mobility of saturated sands. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1975 (6)
- 26 Peacock, W. H. and Seed H. B. Sand liquefaction under cyclic loading simple shear condations. Journal of SMFD, ASCE, 1968(3)
- 27 DeAlba, P., Seed, H. B. and Chang, CK. Sand liquefaction in large-scale simple shear tests. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1976 (9)
- 28 Tokimatsu, k., Yoshimi, Y. Empirical correlation of soil liquefaction based on SPT N-value and fines content. Soils and Foundations, 1983(4)
- 29 Seed, H. B., Tokimatsu, k., , Harder, L. F., Chung, R. M. Influence of SPT procedures in soil liquefaction resistance evaluations. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1985 (12)
- 30 Lee, K. L., Seed, H. B. Cyclic stress condations causing liquefaction of sand. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1976 (1)
- 31 Zen K., Yamazaki H. Mechanism of wave-induced liquefaction and densification in seabed. Soils and Foundations, 1990(4)
- 32 Seed, H. B., Martin, G. R., Lysmer, L. Pore water pressure changes during soil liquefaction. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1976 (4)
- 33 Silver, M. L., Chan, C. K. et al. Cyclic triaxial strength of standard test sand. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1976 (5)
- 34 Toki, S., Tatsuoka, F. et al. Cyclic undrained triaxial strength of sand by a cooperative test program. Soils and Foundations, 1986, 26, 117-128
- 35 陈国兴,胡庆兴,刘雪珠. 关于砂土液化判别的若干意见. 地震工程与工程振动, 2002(1)
- 36 Seed, H. B., Martin, G. R., Lysmer, L. The generation and dissipation of pore water pressures during soil liquefaction. Report No. EERC72-26, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkely, 1975
- 37 Finn, W. D. L., Lee, K. W., Martin, G. R. An effective stress model for liquefaction. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1977 (6)
- 38 徐志英,沈珠江. 地震液化的有效应力二维动力分析方法. 华东水利学院学报, 1981(3)
- 39 张建民,谢定义. 饱和砂土振动孔隙水压力增长的实用方法. 水利学报, 1991(8)
- 40 陈国兴,刘雪珠. 南京粉质粘土与粉砂互层土及粉细砂的振动孔压发展规律研究. 岩土工程学报, 2004
- 41 Martin, G. R., Finn, W. D. L., Seed, H. B. Fundamentals of liquefaction under cyclic loading. Journal of the Geot. Eng., ASCE, 1975 (5)
- 42 Yasuhara, K. et al. Cyclic strength and deformation of normally consolidated clay. Soils and Fouda-

- tions, 1982(3)
- 43 Hyde, A. F. L. et al. A pore pressure and stability mode for a silty clay under repeated loading. *Geotechnique*, 1985(2)
 - 44 Kondner, P. L. Hyperbolic stress strain response: cohesive soils. *Journal of SMFD, ASCE*, 1963(1)
 - 45 Hardin, B. O., Drnevich, V. P. Shear Modulus and damping in soils design equations and curves. *Journal of SMFD, ASCE*, 1972(7)
 - 46 Finn, W. D., Lee, K. W., Martin, G. R. An effective stress model for liquefaction. *Journal of the Geot. Eng., ASCE*, 1977 (6)
 - 47 Matasovic, N. and vucetic, M. Cyclic characterization of liquefiable sands. *Journal of the Geot. Eng., ASCE*, 1993 (11)
 - 48 Idriss, I. M., Dobry, R., Singh, R. M. Nonlinear behaviour of soft clays during cyclic loading. *Journal of the Geot. Eng., ASCE*, 1978 (12)
 - 49 陈国兴, 谢君斐, 张克绪. 土的动模量和阻尼比的经验估计. *地震工程与工程振动*, 1995(1)
 - 50 Seed, H. B., Idriss, I. M. Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis. Report No EERC70-10, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkely, 1975
 - 51 Seed, H. B. et al. Soil moduli and damping factors for dynamic analyses of cohesionless soils. *Journal of the Geot. Eng., ASCE*, 1986 (11)
 - 52 Ishihara
 - 53 陈继华. 新近沉积土动力性能及深软场地地震效应研究[D](指导教师: 陈国兴). 硕士学位论文. 南京: 南京工业大学, 2004
 - 54 陈国兴, 刘雪珠. 南京及邻近地区新近沉积土的动剪模量和阻尼比的试验研究. *岩石力学与工程学报*, 2004(8)
 - 55 吴世明等编著. 土动力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000
 - 56 张克绪, 谢君斐著. 土动力学. 北京: 地震出版社, 1989
 - 57 刘颖, 谢君斐等编著. 砂土震动液化. 北京: 地震出版社, 1984
 - 58 周健, 白冰, 徐建平编著. 土动力学理论与计算. 北京: 中国建筑工业出版社, 2001

第 12 章 填土的工程性质

12.1 概述

土石料是人类最早使用的天然建筑材料,具有就地取材、工程性质良好等优点,被广泛应用于水利工程中的堤防、土石坝,道路工程的路堤、路基,垃圾填埋场的粘土衬垫,建筑物地基,以及填海造陆与飞机场等填方工程中。土石料用途广泛,又是一种用量最大的天然建筑材料,有些工程的土石方量达到几百万立方米甚至几千万立方米,以土石坝为例,目前世界上高度 100m 以上的土石坝已有 200 余座,现最高的土石坝是前苏联的罗贡坝,坝高达 325m。目前在建的三峡库区巫山县污水处理厂高填方地基的填筑高度达 79m,高填方场坪上修建直径达 70m 的氧化沟与二沉池,对填方沉降要求严格(要求总沉降小于 10cm,不均匀沉降小于 2cm),填筑体修建完成后要经受三峡库水位反复升降带来的影响,因此要考虑填土的湿化变形。

填方工程是用土、石天然建筑材料经过开挖、运输、卸料、摊铺和压实等工序修筑而成,压实是最后一道工序,也是最重要的工序。粘性土的压实主要靠颗粒及其吸着水膜的弯曲、畸变及颗粒的重新排列来完成;无粘性土和碎石的压实主要靠颗粒重新排列和颗粒接触点局部破碎来完成。土石料压实后,其抗剪强度增加,压缩性减小,渗透性降低以及抗渗稳定性增加,有利于填方工程的安全。土石料压实的起源虽可远溯至战国时期,据我国《管子·度地》中记载,战国时期,修筑黄河堤防的民工使用的工具中有筑(相当于现代的夯),但直到 20 世纪 30 年代才逐步建立了压实理论。由于当时大型土坝的出现,促进了压实理论和技术的迅速发展,填方压实质量的控制技术也有了很大的提高。美国加州公路处最早研制了击实仪,并在 1929 年确定了用击实仪来求填土的最优含水率和最大干密度;1933 年美国加州供水局 R.R.Proctor 工程师发表了“土的压实基本原理”,总结了道路工程和洛杉矶市修筑土石坝的经验,提出了标准击实仪及室内试验方法,推动了填土压实质量控制技术的研究与发展。

自 Proctor 压实原理发表后,填土压实质量的控制才逐步标准化和规范化,目前各国规范对压实质量控制的规定主要有质量控制、施工方法控制和质量标准与施工方法双重控制等三种方式。控制指标有压实度 K_c 、相对密度 D_r 、孔隙率 n 和沉陷量、承载比 CBR 值、载荷板试验的弹性模量 E_0 等;密实度测定方法有环刀法、灌砂法和灌水法,快速含水率测定法;20 世纪 70 年代逐步推广使用

核子水分—密度仪来测定填土的含水率和密度。1953年 Davis 首次提出填土填筑质量控制的统计评价法,此后在多数土石坝工程的质量控制中采用了数理统计方法。1980年在法国巴黎召开了国际压实技术会议,发表了压实理论、压实技术和质量控制等方面内容的论文115篇,除了填土的压实外,尚包括沥青和混凝土压实方面的文章。

土是各种大小不同颗粒的混合物,通常将以细粒(粉粒和粘粒)为主的土称为细粒土或粘性土,以粗粒为主的土称为粗粒土或无粘性土,包括块石、碎石等。粗粒与细粒的分界粒径标准尚不统一,美国统一分类标准为0.075mm,英国、法国、德国、瑞典和日本的标准为0.06mm,我国《土的分类标准》(GBJ145—1990)和《土工试验规程》SL237—1999采用0.075mm,《公路土工试验规程》采用0.074mm。许多资料表明,无论是缺乏中间粒径的粗粒土或连续级配的粗粒土, $d=2\sim 5\text{mm}$ 颗粒含量一般较少,在击实试验中一般以5mm作为粗料和细料的界限值(5mm既不是砾粒和砂粒的界限值,也不是粗粒土和细粒土的界限值),大于5mm的颗粒称为粗料,含量用 P_5 表示,粗粒土和细粒土具有不同的压密性质。

土石方填筑工程,其压实费用一般占总造价的5%~15%,但压实工作直接影响工程质量,是决定工程质量的关键工序。有些工程曾因压实方法或控制含水率不当,压实质量达不到设计标准,被迫临时变更设计或中途停工;有些工程因压实质量差,完工后发生滑坡、裂缝、漏水等质量事故,不能正常发挥工程效益。因此,必须研究不同组成的土石料的压实特性和力学特性;合理选择压实机械和压实施工参数,作好压实质量控制。此外,填土的湿化变形是其重要力学特性之一,本章独辟一节进行专门讨论。

12.2 粗粒土的压实和力学特性

粗粒土分布广泛,储量丰富,它具有压实性能好、填筑密度大、抗剪强度高、就地取材、少占农田、施工快速和施工时受雨季影响小等优点,在工程建设中得到广泛应用。随着大型土工试验仪器和重型振动平碾的使用,超径粗粒土在堆石坝、公路与铁路的路堤、飞机场等填方工程中的应用越来越广泛。

根据细粒含量的不同,将粗粒土分为无粘性粗粒土和粘性粗粒土,细粒含量 $\leq 5\%$ 的粗粒土称为无粘性粗粒土,而细粒含量大于5%的粗粒土称为粘性粗粒土,它们有不同的压实性能。

12.2.1 无粘性粗粒土的压实特性

1. 压实特征

对能自由排水的无粘性粗粒土,压实效果与颗粒组成、粗料含量、细料性

质、压实功能、压实方法等因素有关。压实时没有最优含水率，一般在完全干燥和饱和时都可以获得较大干密度 ρ_d (g/cm^3)，而在其中间含水率得到的干密度较低，如图 12-1 所示。

从图 12-1 中可以看出，当含水率为零时，干密度值较大，稍增大含水率，干密度反而减小，直至曲线上出现干密度值最小的谷点；此后，随含水率增加，干密度增加，压实曲线出现双峰值，这是无粘性粗粒土特有的特征。主要原因是无粘性粗粒土的颗粒较粗，颗粒间联结力趋于零，当含水率很小时，在外力作用下，大小颗粒之间易于充填，形成较高密度；当稍增加含水率后，在颗粒表面形成一层薄膜水，水分子产生似粘结力，不易压实，干密度较小；随着含水率继续增加，水膜增厚，水分子引力逐渐减小，以至消失，同时在颗粒间起到润滑作用，减小了摩阻力，可以达到较高密度值。

一般而言，无粘性粗粒土具有自由排水能力，压实中孔隙水被挤压出来，其最优含水率相当于全部孔隙被水填充的饱和含水率。在实际施工过程中，当填料为干燥状态时，干密度较大，不需加水；当处于潮湿状态时，需要加水改变接近谷底含水率的不利状态，增加压实效果。我国《碾压式土石坝施工技术规范》规定，对于砂砾石和堆石，铺料后应充分加水，加水率宜为填筑工程量的 20% ~ 40%；日本《坝工设计规范》(1987) 规定石料加水量为填筑工程量的 30% ~ 50%。

充分加水总是有利于压实，尤其对于吸水率大的软岩颗粒，加水使得其软化，并在压实过程中破碎、变形，减小填筑体的工后变形。但是企图通过加水使填料达到最佳含水率以获得最大干密度是很困难的，因为粗粒土难以保持水分，用增加含水率来增大压实效果反而不经济。日本的手取川坝、美国的奥洛维尔坝在现场对填筑石料进行过加水与不加水填筑对比试验，结果表明，加水与不加水填筑的压实效果差别很小；小浪底堆石料碾压加水与不加水对比试验结果表明，加水后沉降变形量仅增加 1 ~ 3mm，干密度仅增加 0 ~ 0.013 g/cm^3 ，加水对压实效果影响甚微。

2. 影响压实的主要因素

影响无粘性粗粒土压实的因素很多，主要有压实功能、最大粒径、级配、颗

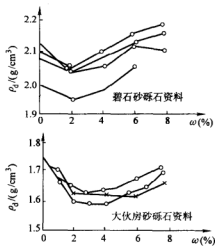


图 12-1 无粘性粗粒土的压实曲线

粒形状等。

(1) 压实功能 室内试验和现场碾压试验都说明随压实功能增加, 干密度增加, 如龙滩堆石坝主堆石料以砂岩为主, 含 30% 板岩, 用 15t 振动平碾作现场碾压试验, 铺料厚度为 60cm, 碾压 6 遍、10 遍、12 遍, 压实后干密度分别为 2.23g/cm^3 、 2.26g/cm^3 、 2.28g/cm^3 。根据昌马 (73 组)、碧口 (2 组) 和毛家村 (15 组) 三个工程粗粒土试验数据得到的压实功能与干密度的关系见图 12-2。

从图 12-2 中可以看出, 干密度的增加不与压实功能的增加成线性比例。随压实功能的增大, 干密度迅速增大; 但当压实功能增至某值以后, 干密度的增长率减小, 压实效果降低。单纯靠增加压实功能来提高干密度是不经济的, 实际施工时应根据这一规律, 选择经济合理的压实功能, 据此选择出合适的压实机械和压实方法。上述三个工程 90 组砂砾石试验数据表明, 其最优压实功能为 500kJ/m^3 左右。

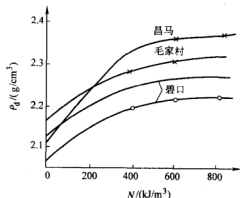


图 12-2 无粘性粗粒土干密度与压实功能的关系

(2) 压实方法 压实方法不同, 施加于土体上作用力的大小以及作用原理不同, 压实效果也不同。如采用夯实时, 土体承受的是冲击力; 当采用平碾碾压时, 土体承受的是碾的重量; 当采用振动碾时, 土体还要承受振动力。实践证明, 对于无粘性粗粒土, 在一定的静荷载和动荷载联合作用下, 才能达到较好压实, 振动法压实效果最好, 而且铺土厚度可以提高, 因此工效高。

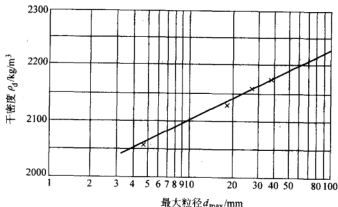


图 12-3 最大粒径与压实干密度的关系

(3) 最大粒径 W.I.Low 和 C.Senet (1973 年)、史彦文 (1981 年) 等根据试验资料得出结论: 采用相似级配, 最大粒径与压实干密度在半对数坐标上成线性关系, 如图 12-3 所示。

从图上可以看出, 干密度随最大粒径增加而增加, 对于最大粒径很大的堆石料, 在室内没有条件直接测定原级配的最大干密度。根据以上结论, 可以在室内作几组最大粒径、其级配按与原型级配的相似级配制备, 在室内测定最大干密度, 根据最大干密度与最大粒径的关系, 推求原型堆石料的最大干密度。

(4) 可压实性 Terzaghi (1925 年) 将压实比 F (Compactibility) 定义为

$$F = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{e_{\min}} \quad (12-1)$$

式中 e_{\max} 、 e_{\min} ——最大孔隙比和最小孔隙比。

在级配良好的粗粒土中, 压实比 F 较大, 这种土易于压实。在均匀粗粒土中, 压实比 F 较小, 这种土不易于压实。

(5) 颗粒级配 颗粒级配直接影响粗粒土的压实难易与干密度大小, 试验数据表明, 凡不均匀系数 C_u 值大、曲率系数 C_c 在 1~3 左右, 级配良好的粗粒料, 其压实性 F 均较大, 最大干密度较大。Talbot 提出易于压实粗粒土的理想级配经验公式为

$$P = \left(\frac{d}{d_{\max}} \right)^n \times 100\% \quad (12-2)$$

式中 P ——小于某粒径的百分含量;

d ——某粒径的尺寸;

d_{\max} ——最大粒径;

n ——决定级配曲线形状的指数, Lee 建议 n 取 0.25~0.50, 压实性最好。

在压实过程中, 由于粗颗粒受到较高的接触应力, 受挤压而破碎, 级配会发生显著的变化, 母岩强度低时其碎裂量更大, 有利于颗粒排列和互相挤紧, 施工中不一定要严格按所谓理想级配进行控制。

3. 室内压实方法

粗粒土的密实度不能用某一密度或某一孔隙比来表示, 而应采用相对密实度指标 D_r , 它决定于粗粒土的最大、最小干密度, 关键在于测定最大干密度。相对密实度概念由 Terzaghi 在 1925 年提出, 从 20 世纪 50 年代后期开始, 这一概念得到广泛应用。其表达式为

$$D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{\rho_{d\max}(\rho_d - \rho_{d\min})}{\rho_d(\rho_{d\max} - \rho_{d\min})} \quad (12-3)$$

(1) 最小密度试验 测定最小密度 $\rho_{d\min}$ 采用可避免体胀和产生最小颗粒分

离的标准室内试验, 试验规程要求能够装填达到的最松压实状态下土的参考干密度, 相应的孔隙比称为最大孔隙比 e_{\max} 。对于粒径小于 5mm 的砂及砂砾, 其最小密度试验有量筒法、漏斗法和松砂器法; 对粒径大于 5mm 粗粒土, 采用铲、勺松填法。

(2) 最大密度试验 最大密度 $\rho_{d\max}$ 测定采用标准室内试验 (产生最小颗粒分离及破碎) 而能得到的最紧密状态下土的参考干密度, 相应的孔隙比称为最小孔隙比 e_{\min} 。最大干密度试验方法有振动轻锤法、振动台法、表面振动器法, 参见图 12-4。

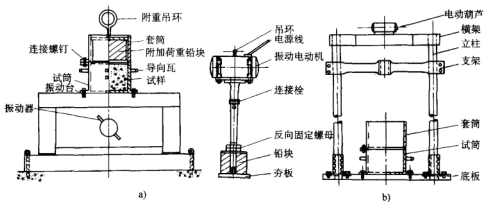


图 12-4

a) 振动台试验装置 b) 表面振动压实仪实验装置

美国垦务局较早开发了振动台法测定无粘性粗粒土的最大干密度法, 该方法比较成熟, 应用广泛, 已被列于许多国家的有关规范中, 如美国 ASTM、日本、加拿大和澳大利亚等, 水利部《土工试验规程》和交通部《公路土工试验规程》也采用该方法。但存在的问题是, 它只限于测定 $d_{\max} \leq 60\text{mm}$ 的无粘性粗粒土的最大干密度, 随着压实技术的不断发展, 堆石料的最大粒径已达到 1~1.5m, 对于这种超径粗粒土, 无法进行原级配料的试验。对超径料的处理, 各国采用相似级配法、等量替代法、剔除法等方法, 用缩小粒径后的模型级配测定最大干密度。目前没有明确的相似原理和模型试验理论说明缩尺效应的影响, 不能说明测定的最大干密度与原级配料最大干密度的关系, 这种试验结果仅具有一定的参考意义。

表面振动器法将振动夯直接作用于试样上, 其重量已包括在附加荷重之中, 而试样筒和试样的重量则作用在地板上。从压实原理看, 它比振动台法更接近于现场碾压试验; 它的另一个优点是, 采用加大仪器尺寸的大型试验测定 $d > 60\text{mm}$ 的粗粒土的 $\rho_{d\max}$ 时, 所增加的试样重和试样筒重, 与振动夯没有直接关

系, 因此可以实现更大规模的大型试验, 具有发展前途。这种方法已被瑞典、英国采用, 交通部《公路土工试验规程》也采用了该方法。瑞典戴纳帕公司在巴基斯坦塔尔贝拉坝曾用重 9261N 的振动夯, 离心力为 30kN, 试样筒直径为 900mm, 测定 $d_{\max} = 300\text{mm}$ 填石料的 ρ_{dmax} 。

12.2.2 粘性粗粒土的压实特性

粘性粗粒土是由粘性细粒土和粗颗粒土组成的混合料, 既具有无粘性粗粒土的性质, 又具有粘性土的性质, 在非自由排水、颗粒间有粘结力、水分子引力等对力学性质的影响方面和粘性土相同; 在粒径效应、剪胀性等对力学性质的影响方面又与粗粒土相同。

1. 压实特征

粘性粗粒土压实与粘性土一样具有最优含水率和最大干密度, 击实曲线如图 12-5 所示, 两者不同点在于, 粘性粗粒土的最大干密度值 ρ_{dmax} 较大, 而最优含水率 w_{op} 值较小。两者之间的差距, 随着粘性粗粒土中的粗粒含量的增加而增大。

干密度随含水率而变化的根本原因是粗粒土中含粘性土颗粒, 颗粒之间存在粘结力、水分子引力的作用, 含水率较低时, 粘结力、水分子引力较大, 阻碍了颗粒间的移动, 不易压实, 压实干密度较小; 随含水率的增加, 颗粒表面水膜产生后, 水分子引力减小, 当含水率增加到一定程度时, 不但引力消失, 粘结力削弱, 水分子还在颗粒间起润滑作用, 压实密度随含水率增加而增大, 出现最优含水率和最大干密度; 当含水率超过最优含水率后, 颗粒间孔隙为水所占据, 粘性粗粒土的透水性较弱, 不能自由排水, 压实过程中孔隙水不能排出, 影响压实效果, 压实密度随含水率的增加而减小。

2. 影响压实的主要因素

(1) 压实功能 当土料和压实方法相同时, 压实功能不同, 压实后的干密度大小也不同, 如图 12-6 所示。从图中可以看出, 干密度随着压实能的增加而增大, 但当压实功能增大到一定程度后, 随压实功能增加, 密度增加较小, 存在一个

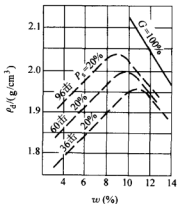


图 12-5 粘性粗粒土的击实曲线

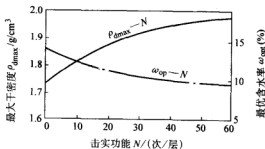


图 12-6 粘性粗粒土干密度与压实功能的关系

最优压实功能。

不同的工程有不同的要求,如粘性粗粒土中含粘粒,透水性较小,用它作为防渗心墙或斜墙,要求具有一定的干密度、良好的防渗性能和一定的塑性变形能力,在填筑时只宜采用适当的压实功能,防止超压密时土体内部发生剪切破坏,形成渗透通道,影响防渗效果,宜采用轻型击实标准。

(2) 压实方法 不同压实方法有不同的压实效果,对于粘性粗粒土而言,颗粒间存在粘结力,压实法容易克服阻力使颗粒发生位移,相互填充并挤紧,增加土体密度;振动法的振动次数多但能量小,荷载作用快速,不易克服颗粒间的粘结力,而且孔隙水不易排出,并产生一种反弹力,因此振动法的压实效果比击实法差。

(3) 粗粒含量 不同粗料含量的粘性粗粒土的压实曲线如图 12-7 所示。从图中可以看出,最大干密度 ρ_{dmax} 随粗料含量的增大而增大,最优含水率随粗料含量的增大而减小。如图 12-8 所示,当粗料含量 $P_s \leq 30\% \sim 40\%$ 时, ρ_{dmax} 增长值较小,当 $P_s > 30\% \sim 40\%$ 时, ρ_{dmax} 增长值较快,以至当 $P_s = 60\% \sim 70\%$ 时,最大干密度值出现最大值,表明此时粗料含量达到最优。若粗料再增加,则细料不足以填满孔隙,压实最大干密度反而下降。

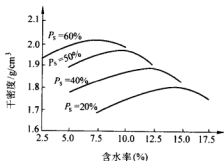


图 12-7 不同粗粒含量与
压实干密度的关系

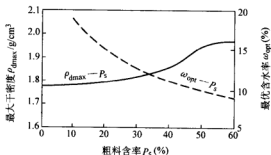


图 12-8 最大干密度、最优含水率
与粗料含量的关系

(4) 粗粒风化程度 粗粒风化程度直接影响其压实干密度的大小,一般用粗粒的饱和面干比重 G_{s3} 反映粗粒的分化程度大小,风化愈厉害,饱和面干比重愈低,压实最大干密度愈小。图 12-9 是日本濑户堆石坝(坝高 110.5m)心墙防渗料的试验结果,该心墙防渗料采用风化页岩及部分风化砂岩。

(5) 粗料含量对渗透性的影响 图 12-10 是粗料含量与渗透系数的关系,从图中可以看出,当粗料含量 $P_s \leq 30\% \sim 40\%$ 时,随粗料含量增加,渗透系数 k (cm/s) 没有明显增加,有的还有所减小;当 $P_s > 30\% \sim 40\%$ 以后,渗透系数随粗料增加而显著增加。

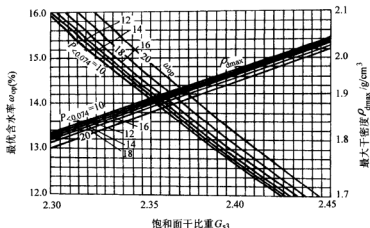


图 12-9 细粒含量 $P_{<0.074}$ 与 G_{s3} 、 ρ_{dmax} 、 w_{op} 的关系

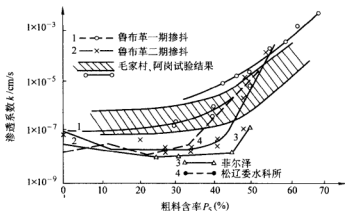


图 12-10 渗透系数与粗料含量的关系

根据其渗透特性，以及粘性粗粒土的力学性质比粘性土好的特点，在土石坝中常利用天然粘性粗粒土填筑作为心墙、斜墙等防渗体。对于粘粒含量高的粘性土，其含水率大，填筑困难，这时掺加适量的粗料以改善其压实特性，可以增加其填筑密度、减小沉陷变形、增加抗剪强度，如菲尔泽水电站 170m 高堆石坝心墙是用土与砂砾石的混合料填筑而成的，细粒土与砂砾石的含量各占一半。

3. 室内压实方法

(1) 击实标准与击实仪 室内压实方法有适用于粘性土的击实试验和适用于无粘性土的振动法试验，这两种方法被引用于粘性粗粒土的室内压实试验，并已

标准化。大量的试验结果表明,用击实试验法测定的粘性粗粒土的 ρ_{dmax} ,比用振动法测定的 ρ_{dmax} 大,表明击实试验法的压实效果较好。由于粘性粗粒土中含粗料,其粒径大,小型击实仪不能满足要求,需要采用与大粒径相适应的大型击实仪。

大型击实仪有关参数的确定,要满足标准化的要求,如:击实筒的高度 H 、内径 D 和粗料最大粒径 d_{max} 之间应满足 $H = D \geq 5d_{max}$; 击实锤底直径 $d = D/2$; 每层铺料厚度 B 和层数 N_L 应满足 $B \geq (1 \sim 2) d_{max}$ 、 $N_L = H/B$; 确定击实功能 E_e 和击实冲量 Q_e 。如我国一些单位曾制造大型击实仪,击实筒内径在 25 ~ 35cm 之间,分三层装土,用 12.5kg 的击锤,落距为 46cm,每层锤击 36 次、60 次和 96 次,测定粗粒土的含水率、干密度与颗粒组成。

利用大型击实仪测定粘性粗粒土的最大干密度与最优含水率,除含水率的影响外,粗料含量不同,最大干密度(包括最优含水率)差异较大,需要对每一种粗料含量的粘性粗粒土进行击实试验,为工程设计提供指标和质量控制标准。

(2) 确定不同粗料含量的最大干密度理论计算法 室内大型击实试验测定不同粗料含量的最大干密度,需要的土样数量较大,试验工作量大。在不具备大型击实仪条件下,可以采用小型击实仪进行试验,用下面介绍的理论计算法和经验公式法来确定粘性粗粒土的最大干密度。

1) 理论计算法。F.C.Walker 和 W.G.Holtz 假定砾石土受一定功能击实时,粗料间孔隙完全为微细粒所充填,而且细粒的压实干密度达到细料用标准功能单独击实的最大干密度,不同粗料含量的最大干密度的理论公式如下

$$\rho'_{dmax} = \frac{1}{\frac{P_5}{\rho_w G_{s2}} + \frac{1 - P_5}{\rho_{dmax}}} \quad (12-4)$$

$$w'_{op} = w_{op} (1 - P_5) + w_{ab} P_5 \quad (12-5)$$

式中 ρ'_{dmax} 、 w'_{op} ——校正后全料的最大干密度、最优含水率;

ρ_{dmax} 、 w_{op} ——细料用小型击实仪进行击实的最大干密度、最优含水率;

P_5 、 G_{s2} ——粗颗粒含量、粗颗粒干相对密度;

w_{ab} ——粒径大于 5mm 粗颗粒土的吸着含水率;

ρ_w ——水的密度。

研究表明,此方法适用于 $P_5 \leq 30\%$ 的粘性粗粒土。

2) 经验公式法。砾石土最大干密度的理论计算与实测结果表明,粗料含量较小时(一般在 $P_5 < 15\%$ 范围内),理论计算值与实测值一致;粗料含量较大时,实测值大于理论值,且差别随着粗料含量的增加而增大。杨荫华根据七个砾石土不同粗料含量的最大干密度 ρ_{dmax} 实测资料,得到的经验公式为

$$\rho_{dmax} = \rho'_{dmax} [1 + 0.171 \times \lg(1 - P_5)] \quad (12-6)$$

式中 ρ_{dmax} ——粘性粗粒土的最大干密度;
 ρ'_{dmax} ——由式 (12-4) 计算出的最大干密度;
 P_5 ——粗颗粒含量。

当缺乏砾石土不同粗粒含量的最大干密度实测资料时, $P_5 < 15\%$, 可以直接用理论公式 (12-4) 计算求得不同粗粒含量的最大干密度 ρ'_{dmax} ; 当 $15\% < P_5 < 60\%$ 时, 可以用理论公式 (12-4) 及经验公式 (12-6) 求得不同粗粒含量的最大干密度 ρ_{dmax} 。

12.2.3 试验粗粒土的超径料处理

在测定粗粒土的工程特性时, 因颗粒粒径大、需要大型仪器进行试验, 而所谓大型仪器也只是相对常规土仪器而言的。以大型三轴剪切仪为例, 当前国内外常用的试样尺寸为直径 $D = 300\text{mm}$, 高度 $H = 600 \sim 750\text{mm}$, 允许试料的最大粒径为 60mm ; 最大的三轴剪切仪的试样尺寸为直径 $D = 1200\text{mm}$, 高度 $H = 2500\text{mm}$, 试料最大允许粒径为 200mm 。而天然存在的和应用于工程上的粗粒土和超径粗粒土, 远超过试验仪器允许的最大粒径。对大于试验仪器允许最大粒径的颗粒称之为超径料。为利用现有大型仪器进行试验, 需对超径料进行必要的处理, 目前应用较多的处理方法有如下几种。

1. 剔除法

该方法是将代表性级配中超径 (颗粒) 料剔除掉, 剔除后的级配按式 (12-7)、式 (12-8) 计算。此方法简单、使用方便, 但因剔除了部分超径大颗粒, 相对使细粒含量增大, 实质上超径料由剩余的小于允许最大粒径的全料颗粒所代替, 故亦称全量代替法, 细料含量增多引起颗粒组成和性质变化。因此, 该方法只宜在超径料含量不大于 10% 的范围内使用。其计算式为

$$P_i = \frac{P_{0i}}{1 - P_0} \quad (12-7)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P_{0i} + P_0 \quad (12-8)$$

式中 P_{0i} ——处理前某粒级含量 (%);
 P_i ——处理后与 P_{0i} 对应某粒级含量 (%);
 P_0 ——超径料百分含量, 以小数计。

2. 等量代替法

等量代替法是将粗粒土中超径料等重量地用允许最大粒径 d_{max} 至 5mm 的粗料部分各粒级颗粒按含量加权平均代替, 代替后各粒级的颗粒含量按式 (12-9)

计算。该方法的优点是代替后的级配仍保持原来的粗料含量, 细料含量和性质不变, 但存在大粒径缩小、粒级范围变小、均匀性增大等缺点, 故宜在超径料含量不大于 50% 范围内使用。其计算式为

$$P_{5i} = \frac{P_5}{P_5 - P_0} P_{05i} \quad (12-9)$$

$$P_5 = \sum_{i=1}^n P_{5i} = \sum_{i=1}^n P_{05i} + P_0 \quad (12-10)$$

式中 P_5 ——粗料含量 (%) ;

P_{5i} ——处理后 $d > 5\text{mm}$ 某一粒级含量 (%) ;

P_{05i} ——处理前与 P_{5i} 对应的粒级含量 (%) ;

P_0 ——超径料含量 (%) 。

3. 相似级配法

相似级配法是根据原级配的最大粒径 $d_{0\max}$ 和允许最大粒径 d_{\max} 的比例, 将各粒径缩小, 缩小前后对应粒级间的含量百分数不变, 或者说在颗粒组成累计曲线图 12-11 上以 d_{\max} 点代替 $d_{0\max}$ 点, 以此点为起始点将颗粒组成曲线平移, 保持两曲线间的水平距离始终相等。该方法的优点是保持了颗粒级配的几何形状相似, 不均匀系数不变; 缺点是全料的粒径皆缩小为原来的 $d_{\max}/d_{0\max}$ 倍, 引起粗料含量变小、细料含量增大和性质变化, 故不宜在细料含量多的粗粒土中使用, 多应用于粗料含量大于 50% 的卵漂石、堆石中。为使细料性质不变, 有人建议在相似级配法中, 对 $d < 5\text{mm}$ 或 $d < 0.1\text{mm}$ 的颗粒组成仍使用原级配。处理后级配的计算方法如下式所示

$$n = \frac{d_{0\max}}{d_{\max}} \quad (12-11)$$

$$d_i = \frac{d_{0i}}{n} \quad (12-12)$$

$$P_i = P_{0i} \quad (12-13)$$

式中 $d_{0\max}$ ——原级配最大粒径;

d_{0i} ——原级配某粒径;

d_{\max} ——相似级配 (缩小后) 最大粒径;

d_i ——相似级配 (缩小后) 某粒径;

n ——缩小倍数;

P_i —— d_i 的百分含量;

P_{0i} —— d_{0i} 的百分含量。

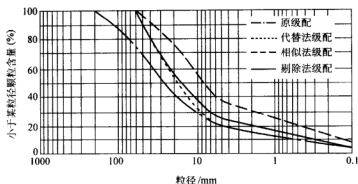


图 12-11 原级配和处理后颗粒组成曲线

12.2.4 粗粒土的力学特征

一般而言，粗粒土经过压实，其强度和刚度都会有所增加。粗粒含量、颗粒性质和含水率等，影响压实粗粒土的抗剪特性。

粗粒土的抗剪强度试验资料表明：粗粒土的抗剪强度由细料强度、粗料强度、粗细料之间强度等三部分组成；当 $P_s \leq 30\%$ 时，抗剪强度基本上决定于细料，随粗料强度的增加抗剪强度增加甚小；当 $30\% \leq P_s < 70\%$ 时，抗剪强度取决于粗、细料的共同作用，并随粗料含量的增加显著增大；当 $P_s \geq 70\%$ 时，抗剪强度取决于粗料，并随粗料含量增加而有所减小。这表明粗料含量是决定抗剪强度的主要因素。试验和理论研究表明，粗粒土的抗剪强度由矿物颗粒滑动的摩擦力、与咬合程度有关的剪胀分量和颗粒破碎与重新排列所需能量而发展的强度等三个分量组成。其中，矿物颗粒间的滑动阻力分量是由于颗粒接触面不平造成的，对某种矿物通常是不变的；低围压下粗粒土剪切时的咬合力是由于发生剪胀来抵抗围压需要消耗能量而发展的强度；而在高围压下，剪碎效应增强。

大量试验资料表明，颗粒坚硬、颗粒形状呈棱角、级配良好、填筑密度大，其抗剪强度高；反之，颗粒软弱、级配均匀、浑圆状颗粒多、受风化影响大、填筑疏松者，抗剪强度低。另外，粗料含量愈高，饱和状态的抗剪强度与干燥状态抗剪强度的差别愈小，受剪切速率影响愈小；相反，细料含量愈多，干燥和饱和状态的抗剪强度差别愈大，对剪切速率有一定影响。

1. 静力强度

(1) 粗粒土的应力应变规律 大量不同类型粗粒土的三轴剪切试验资料表明，粗粒土的应力应变曲线有应变硬化型与应变软化型两种，如图 12-12 所示。

从图 12-12 中可以看出，侧压力相同时，密度大的粗粒土，其应力应变曲线

为应变软化型；密度小的粗粒土，应力应变曲线为应变硬化型。在密度相同条件下，承受侧压力高的粗粒土，应力应变曲线为应变硬化型；侧压力低的粗粒土，应力应变曲线为应变软化型。

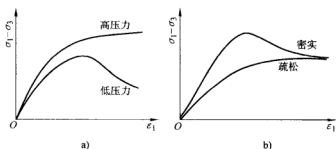


图 12-12 不同条件下的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1$ 关系

a) 密度相同 b) 压力相同

(2) 粗粒土的抗剪强度特征 粗粒土在剪切过程中，伴随着剪切变形还会出现明显的体积变化，这种现象称为剪缩/剪胀，如图 12-13 所示。在排水剪切中，一般剪切初期呈剪缩，后又为剪胀。对于密度大、承受侧压力较小的粗粒土，剪胀变形出现得早，甚至一开始就出现剪胀；相反，疏松的、承受侧压力大的粗粒土，剪切后期才出现剪胀变形，有的甚至不出现。

对于剪胀性的粗粒土，剪胀变形的结果必然是土体变松，孔隙增大，从而引起孔隙压力变小，甚至在剪切破坏时达到负值，这类土的有效强度低于总强度；对于疏松的粗粒土，剪切变形较大，孔隙压力为正值，与常见的细粒土相同，如图 12-14 所示。

(3) 粗粒土的剪碎性对强度特性的影响 粗粒土的颗粒间往往为点接触，在剪切过程中，颗粒接触点的局部压力较高，颗粒容易发生碎裂现象。研究成果表明，对颗粒破碎率起决定性影响的是颗粒本身的强度；围压越大，颗粒破碎率越大；粗料中最大粒径越大，破碎率

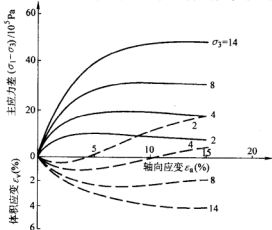


图 12-13 不同围压条件下的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_1 - \epsilon_v$ 关系

越大；不均匀系数越大，破碎率越小，不均匀系数对破碎率的影响比最大粒径大。

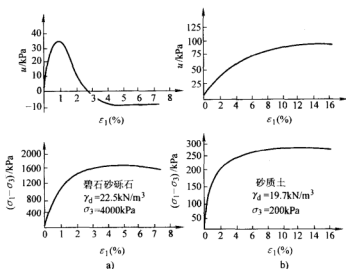


图 12-14 $u - \varepsilon_1$ 和 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ 关系

与砂相比，粗粒料在并不很高的围压下就会出现剪碎，在相同的围压作用下，粗粒料的剪碎率比砂大，粗料土的抗剪强度与颗粒破碎之间存在密切联系。

粗料土在压实过程中，颗粒破碎会促使颗粒的重新排列，孔隙比减小，结构趋于紧密，粗料填筑体在力学上更为稳定；但粗颗粒材料的过度细化，会导致粗颗粒之间的“咬合力”作用减弱，削弱了强度，对抗剪强度特性产生不良影响。

颗粒破碎使得内摩擦角有明显降低，Leslie 根据冲积层中开挖的砾石（粒径为 3.8 ~ 7.6cm）进行的试验结果指出，当围压为 $\sigma_3 = 105 \sim 880 \text{ kPa}$ 时，由于颗粒破碎所造成的内摩擦角降低 $9^\circ \sim 12^\circ$ ；当围压增加至 $\sigma_3 = 4.57 \text{ MPa}$ 时，内摩擦角降低 $3^\circ \sim 4^\circ$ 。

(4) 强度包线的非线性变化规律 粗粒土的强度包线，在低应力、高应力条件下的变化规律是不同的，一般为非直线型，随着围压的增加，内摩擦角 φ 降低，因此粗粒土的内摩擦角 φ 不是常数。粗粒土的破坏包线有三个特征：与砂相比，其破坏包线的弯曲幅度更大（符合剪碎率比砂大的事实）；在 0.5 MPa 以下的低侧压力范围内弯曲最为明显；内摩擦角 φ 与围压 $\lg \sigma_3$ 近似为直线关系。

De Mello (1977) 根据 Marsal 所做的大型三轴压缩试验资料，提出粗粒土的抗剪强度 τ_f 与破坏时的法向应力 σ_n 之间存在如下关系。

$$\tau_f = A\sigma_n^b \quad (12-14)$$

式中 A 、 b ——粗粒土的强度系数、强度指数，为常数；日本土质工学会的研究表明：坚硬岩如花岗岩、斑岩的 b 值在 0.85 以上，风化岩的 b 值在 0.8 以下； b 值大的粗料 A 值就小；饱和状态下的 A 值比风干状态下的小，而 b 值则略有增大。

松本等人根据 1972 年以来的堆石料大型三轴压缩试验成果（20 种岩性 60 组试验），研究了抗剪强度与围压的关系，侧压力的最大值为 0.8MPa 左右，研究结果表明，式（12-14）的相关系数在 0.99 以上，说明式（12-14）具有广泛的实用性。

Duncan (1980) 提出粗粒土的抗剪强度 τ_f 为

$$\tau_f = \sigma_n \tan [\varphi_0 - \Delta\varphi \lg (\sigma_3/p_a)] \quad (12-15)$$

式中 φ_0 、 $\Delta\varphi$ ——粗粒土的强度参数；

p_a ——大气压强。

试验表明，在低应力范围内粗粒土强度包线的截距，其值可达 44 ~ 100kPa，与粗粒土的咬合力有关，上述两个公式不能反映这一客观事实，如忽略咬合力 c 值的存在，会使得数值计算中得出的破坏区域明显偏大。在工程设计中，为了计算方便，往往用直线来替代弯曲的强度包线，在低坝设计中偏于保守，在高坝设计中则偏于危险。

2. 动变形特性

在对粗粒料填方体进行地震分析时，必须掌握粗粒料的动态变形特性。一般用切变模量 G 、泊松比 ν 、阻尼比 λ 等来表示动变形特性。粒料的基本动力性质与砂土有很多相似之处，为了通过室内试验测求粗粒的动变形特性，试样和试验设备都必须具有很大规模，因此，目前有关粗粒料动力性质的研究成果还较少。

(1) 周围压力及剪应变的影响 在常规三轴试验中，平均周围压力 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3) / 3$ ，安山岩堆石料进行的大型循环反复加载三轴试验，其切变模量 G 和剪应变 γ 的关系见图 12-15，切变模量 G 与平均压力的关系见图 12-16。

从图中可以看出：切变模量 G 对平均压力和剪应变 γ 有明显的依赖性；试样的周围压力（平均压力）越小，随着

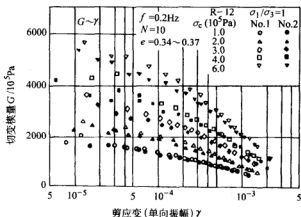


图 12-15 切变模量和剪应变的关系

剪应变 γ 的增大, G 值降低的幅度随之增大。

图 12-17 是为最大粒径在 25~64mm 的粗粒料(碎石、圆砾)的阻尼比与剪应变的关系。与该图中绘出的丰浦砂的数据相比, 应变水平在 $\gamma = 10^{-4}$ 以下时, 粗粒料的阻尼比很大, 但随着 γ 增大, 粗粒料阻尼比的增加较小。

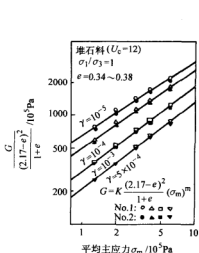


图 12-16 切变模量和平均压力的关系

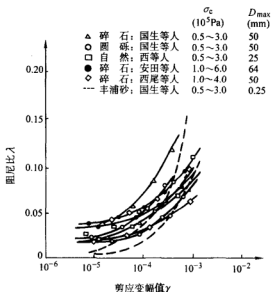


图 12-17 粗料的阻尼比与剪应变的关系

(2) 级配的影响 堆石料和反滤料的不均匀系数受切变模量 G 的影响, 如图 12-18 所示, 为了消除周围压力和孔隙比对 G 的影响, 图中数据均修正成周围压力为 0.1MPa、 $e = 0.4$ 时的值。从图 12-18 中可以看出, 随着不均匀系数的增加, 在较大应变范围内, G 值有减小的倾向, 原因是剪切刚度由大颗粒构成的骨架提供, 如孔隙比相同, 不均匀系数越小, 就越具有高剪切刚度的骨架构造。

用五种试验级配来研究级配对动变形特性的影响, 如图 12-19 所示。图 12-19b 表示了粒径在 2mm 以下时砂粒含量与 $G_0/F(e)$ 的关系 ($\gamma = 10^{-5}$ 时的切变模量记为 G_0), 可以看

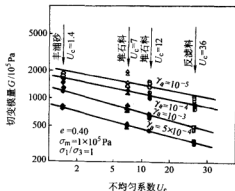


图 12-18 不均匀系数对切变模量影响

出 G_0 值随砂粒含量的增加而减小。图 12-19c 是级配对阻尼比的影响, 其影响比 G 的影响要小一些。

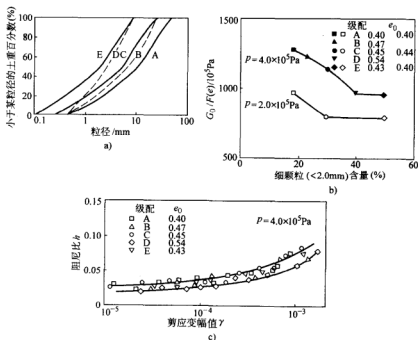


图 12-19 级配对动变形特征的影响

12.3 粘性土料的压实和力学特性

12.3.1 粘性土的压实

1. 压实的基本原理

压实研究最初是针对粘性土的压实。1929 年美国加州公路处较早建立了实验室, 用试验方法确定土的最优含水率和最大干密度, 1933 年 R.R. Proctor 工程师发表了“土的压实基本原理”, 全面系统地阐述了土的压实原理, 并对压实曲线的机理作了初步解释, 自此之后, 压实理论在填方工程中开始得到广泛应用。

土的压实基本原理, 是对指定的粘性土, 用一定的压实功能和压实方法进行压实时, 土的压实干密度与含水率之间的关系。当含水率低时, 压实干密度随含水率的增加而增加, 指某一含水率时, 压实干密度最大, 进一步增加含水率, 压实干密度随含水率的增加而降低。含水率与干密度的关系曲线近似为一条抛物线, 称之为压实曲线或普氏曲线。干密度的最大值称为最大干密度

ρ_{dmax} (kg/m^3), 对应 ρ_{dmax} 的含水率称为最优含水率, 见图 12-20。粘性土的压实特征不同于无粘性粗粒土, 也不同于粘性粗粒土。

粘性土压实曲线的机理是十分复杂的。R.R.Proctor (1933), C.A.Hogentogler (1936), T.W.Lambe (1960), J.W.Hilf (1956), Olson (1963), Barden 和 Sides (1970) 等学者对压实曲线的机理作了各种解释。

Proctor 认为土中水分影响压实有两个主要因素, 即毛细管压力和润滑作用。土的含水率较低时, 土颗粒周围有被表面张力支撑的薄的水膜, 由于表面张力产生毛细管压力, 使土粒彼此拉紧, 产生较大的摩擦阻力, 所以不易压实。随着含水率的增加, 水对土粒表面起润滑作用, 土颗粒间的摩擦力减小, 抗剪强度降低, 因此压实时土颗粒容易移动、滑动, 使压实干密度增加。随含水率继续增加, 由于土中水分过多, 增加了孔隙体积, 所以压实干密度反而降低。

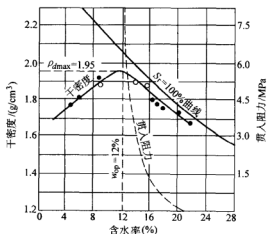


图 12-20 粘性土的压实曲线

Hogentogler 认为土颗粒表面有数层粘着水, 粘着水有较高的凝聚性, 随距土颗粒表面距离的增加凝聚性逐渐降低。他假定土粒在接触点被粘着水隔开, 含水率低时, 土粒接触点粘着水具有较高凝聚性和剪切阻力, 所以压实干密度低; 进一步增加水分, 吸着水膜变厚, 凝聚性减小, 土的抗剪强度降低, 因此压实干密度增加。但仅在一定含水率内, 土的抗剪强度随含水率增加而降低, 假定水的最大润滑作用发生在最优含水率附近, 那么超过最优含水率后, 继续增加水只会使水替换土粒, 增加了孔隙体积, 使得压实干密度降低。近年来的研究表明, 粘着水的厚度仅几个分子厚度, 但一般压实含水率都较大, 土中的水已不限于粘着水, 所以 Hogentogler 的粘着水说是过多强调了粘着水的作用。

Lambe 的颗粒定向理论认为: 颗粒间的物理化学作用和外力作用, 影响土的片状颗粒的几何学排列。适用于解释土的压实, 即低含水率时, 孔隙水中电解质浓度大, 颗粒间的吸引力大而斥力小, 所以呈凝聚结构, 不易压实, 压实干密度低; 增加含水率后, 孔隙内电解质浓度变小, 双电层扩张, 使粒间吸引力减小而斥力加大, 形成分散结构, 易于压实, 干密度大。这一理论的缺点是仅考虑了片状土颗粒, 不适用于含粗粒的土及含有非片状颗粒的土。

Hilf 和 Olson 等人的有效应力理论认为: 含水率低的土孔隙水弯液面曲率大,

较大的毛细管压力在土粒间产生较大的摩擦阻力,抵消了压实效应,难于压实;进一步增加含水率后,毛细管压力变小,减小了粒间摩擦力,而且土中孔隙中气体是连通的,能够迅速排除,在外力作用下土颗粒易于移动,容易压实;当土中水分足够多时,土中气体被封闭在土中,透气性降至零点。土的密度不能继续增加,就达到所谓的“最优含水率”,再增加含水率,只会增加孔隙体积,压实干密度降低,这是由于空气封闭在土中,在外力作用下产生很大的孔隙气压力从而减小了压实效应。

Barden 和 Sides 进行了压实后的非饱和、低塑性粘土的工程特性研究,并与粘土的微观结构进行联系。结果表明,填土的结构受压实含水率的影响显著,压实含水率低时干密度低,是由于直径为 $1/8 \sim 1/4\text{in}$ 的球状土团之间有大量空气充满大孔隙所造成的,土团强度高,能抵抗压实压力而无多大的畸变。如果压实含水率增加,土团变湿并相应地变软,在压实作用下易于畸变,孔隙减小,压实干密度增加;如再继续增加含水率,由于土粒之间的土层增厚,压实干密度降低。Barden 和 Sides 指出,在最优含水率附近气孔隙是封闭的。

2. 影响压实的主要因素

影响粘性土压实的因素很多,如含水率、压实功能、土类、试样含水率制备方法、粗粒含量、粘土矿物、温度等对压实均有影响。

(1) 含水率对压实的影响 如前所述,土的压实基本原理主要是阐明含水率对压实的影响,压实曲线充分说明含水率与压实干密度的关系。

(2) 压实功能对压实的影响 室内击实试验,是将同一土样预先制备数个不同含水率的试样,每个试样分几层装入击实筒内,每层用一定重量和落高的击锤,锤击一定次数。室内单位体积的击实功能 $E_e(\text{kJ/m}^3)$ 、击实冲量 $Q_e(\text{N}\cdot\text{s/cm}^2)$ 按下式计算

$$E_e = \frac{Whnm}{V} \quad (12-16)$$

$$Q_e = \frac{4W\sqrt{2gh}}{\pi d^2 g} \quad (12-17)$$

式中 W ——击实锤重(kN);
 h ——击实锤落距(cm);
 g ——重力加速度(m/s^2);
 d ——击实筒的直径(cm);
 n ——每层击实次数;
 m ——击实层数。

粘性土的最大干密度、最优含水率与压实功能有关,随压实功能增加,最大干密度增加,而最优含水率减小。当压实功能超过某值后,随压实功能的增加,

最大干密度增加值很小, 见图 12-21。

现场填土碾压时的压实功能是用填土密度与室内标准击实密度的比值来衡量。密度比 C 的定义为

$$C = \frac{\rho'}{\rho} \quad (12-18)$$

式中 $\rho' (\text{kg}/\text{m}^3)$ ——填土的湿密度;

$\rho (\text{kg}/\text{m}^3)$ ——用现场填土的土样, 保持原有含水率不变, 用室内标准功能击实的湿密度;

C ——密度比, $C > 1$ 表示现场填土的压实功能大于室内标准击实功能, $C < 1$ 则表示现场填土的压实功能小于室内标准击实功能。

粘性土的压实质量用压实度 K_C 表示, 它是指现场碾压后填土的干密度 ρ_d 与该土的标准最大干密度 ρ_{dmax} 之比。当现场填土的压实功能大于室内标准击实功能时, 可以较容易达到较高的压实度; 如果现场填土的压实功能与室内标准击实功能相当, 施工时要达到较高的压实度是很困难的, 提高压实度的关键在于选择质量大、压实效果好的碾压机械和控制填筑含水率。

(3) 土类对压实的影响 不同类别的土, 用相同的压实方法和压实功能进行压实, 其压实曲线也不同。图 12-22

所示是六种土的压实曲线, 其中压实性最好的是 C 土样, 其最大干密度达到 $1960 \text{ kg}/\text{m}^3$, 最优含水率为 11.5% ; 压实性最差的是 H 土样, 其最大干密度仅为 $1430 \text{ kg}/\text{m}^3$, 最优含水率为 27% 。这六种土样的颗粒级配曲线见图 12-23。

(4) 土样含水率制备方法对压实的影响 土样的制备方法有干土法和湿土法两种: 干土法是指将天然含水率较高的土风干到低于试验要求的含水率, 然后再加水制备成试验要求的含水率; 湿土法是指将天然含水率较高的土风干到试验要求的含水率。一些特殊土, 如南方典型红土, 具有较牢固的团粒结构, 人工制备土样的含水率, 在团粒内外很不均匀, 湿土法制备的土样含水率, 团粒内湿外干; 干土法制备的土样, 团粒内干外湿。由于这两种制备含水率方法不同, 水分在团粒内外分布情况不同, 压实效果也不同, 如某红土的天然含水率为 43.8% , 有两种方法制备土样进行击实试验, 试验结果见表 12-1。

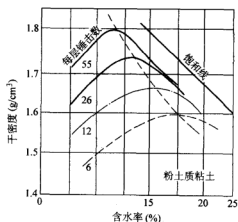


图 12-21 压实功能对压实的影响

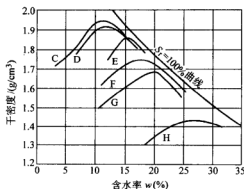


图 12-22 六种土的压实曲线

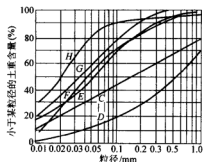


图 12-23 六种土的颗粒级配曲线

表 12-1 某红土击实试验结果

制样方法	起始含水率 (%)	最优含水率 w_{opt} (%)	最大干密度 ρ_{dmax} (g/cm^3)
湿土法	43.8	38.5	1.33
干土法	21.5	34.8	1.37
	12.5	33.5	1.38

按干土法和湿土法求得的结果有很大的差别,对于最大干密度,干土法求得的大,湿土法得到的小;对于最优含水率,前者小,后者大。因此,试样含水率制备应尽量近似于实际施工情况,如土料天然含水率高于最优含水率,土料事先须降低含水率时,应采用湿土法;否则,采用干土法。

(5) 粗粒含量对压实的影响 如前所述,粗料含量较多的土,其最大干密度较高,而最优含水率较小。

(6) 粘土矿物及交换阳离子对压实的影响 一般多水高岭石、准多水高岭石压实性低。伊利石、绿泥石、高岭石压实性较好。蒙脱石一般压实性很低,个别较高,其压实性变化幅度较大。含不同交换阳离子的粘土矿物,压实性也不同,因含有交换阳离子不同,其可压实性顺序为 $\text{Na} > \text{Ca} > \text{Mg} > \text{Fe} > \text{K}$ 。

(7) 温度对压实的影响 随温度降低,土的最优含水率降低,最大干密度减小。

3. 室内压实方法

粘性土的室内压实试验方法有冲击荷重、静荷重、半动荷重(揉搓作用)等压实试验方法。

(1) 冲击荷重压实试验方法 冲击荷重压实试验,又称击实试验。Proctor 于 1933 年提出的压实试验方法就是采用击实试验,该法简单,沿用至今,目前各

国室内粘性土的标准压实试验均是采用击实试验，在室内确定粘性土的最佳含水率 $w_{op}(\%)$ 和最大干密度 $\rho_{dmax}(g/cm^3)$ ，亦称为含水率—密度关系试验法。

对于击实试验，不同的国家有不同的标准，按某一标准建置的击实仪能保证达到该标准化的击实试验结果，其中击实功能 $E_e(kJ/m^3)$ 、击实冲量 $Q_e(N \cdot s/cm^2)$ 是关键性控制指标。美国 ASTM (D-698-70) 和 AASHTO (T-99-61) 标准中的试验方法称为标准普氏法，采用 $E_e = 594 kJ/m^3$ 和 $Q_e = 3.0 N \cdot s/cm^2$ ；ASTM (D-1557-70) 和 AASHTO (T-180-61) 标准中的试验方法称为修正普氏法，采用 $E_e = 2679.5 kJ/m^3$ 和 $Q_e = 6.6 N \cdot s/cm^2$ 。

各国使用的击实试验方法大同小异，基本上可以分为两类，一类是轻型击实试验法，以开始于 20 世纪 30 年代初的普氏试验法为代表，我国水利水电系统多用该法，美国垦务局、陆军工程师兵团、水道试验站等单位的标准，日本标准，德国标准和英国标准等和普氏标准基本接近。另一类是始于 20 世纪 40 年代初的重型击实试验法，以修正普氏试验法为代表，亦称为修正普氏法，我国公路系统多用此标准重型击实试验法的单位击实功为轻型击实法的 4.5 倍。

(2) 静荷重压实试验 采用该方法的有美国加州静荷重压实试验的试验筒直径为 15.2cm，高度为 20.3cm，加荷活塞高度为 12.7cm。试验时，将重约 4kg 风干土样加入要求的水量混合均匀，放入试验筒，用 14MPa 的静压力压实，压力由 0.7MPa 上升至 7MPa 时，其加荷速度控制应变速度为 0.254cm/min；由 7MPa 上升至 14MPa 时，其加荷速度控制应变速度为 0.127cm/min；至 14MPa 后维持压力 1min 不变，然后用 20s 时间将荷重卸下来。

(3) 半动荷重（揉搓作用）压实试验 此种压实试验方法，是模拟羊足碾压实，如哈佛大学的小型压实试验，试验圆筒内径为 3.33cm，高 7.19cm，圆筒上端有一个高约 3.8cm 的套环，压实足为直径 1.3cm 的圆棒，圆棒上部装有弹簧，根据弹簧规格和变形大小可以确定压力的大小。压入速度为 1.5s 一次，一般沿圆筒周压四次，中间压一次，重复以上步骤，至达到要求的次数为止，然后填下一层土，继续压实，一般分五层填土。该方法的特点是小型、快速，在 4h 内可以完成六条压实曲线。

采用同一种压实方法，但在不同的压实功能下进行压实试验，将不同功能的压实曲线上的各最优含水率、最大干密度点相连，得到一条线，该线称为“最优线”，见图 12-24。

从图中可以看出，由于室内各种压实试

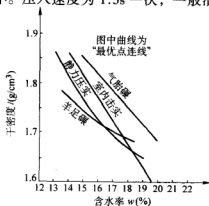


图 12-24 不同压实方法的最优线

验方法及现场碾压机械压实的条件不同,所测得的最优含水率并不一致。气胎碾碾压的最优含水率比室内击实试验测得的最优含水率高1%~1.5%,羊足碾碾压的最优含水率比室内击实试验测得的最优含水率低1%~1.5%。

12.3.2 压实粘性土的力学性质

粘性土压实后,对其强度、抗拉性质、压缩性、渗透性、膨胀性等性质均有显著的改善。

1. 抗剪强度

粘性填土具有扰动的超固结粘性土的抗剪强度特征,其应力应变关系多属于应变软化型。

粘性土的强度与其干密度和含水率有密切的关系,通常其强度随含水率的减小或干密度的增加而提高。在击实曲线上,按不同含水率和相应的干密度制备试样,进行抗剪强度试验,结果表明:当含水率稍低于最优含水率时,强度最高;试样浸水饱和后,强度普遍降低,其强度最高值位于最优含水率附近,见图12-25。

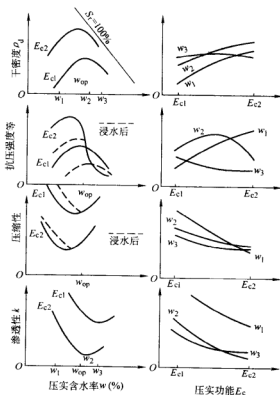


图 12-25 压实后土的性质变化趋势

从图中可以看出,当含水率一定时,随压实功能增加,土的干密度增加,干密度增长率随功能增加逐渐变缓;强度和承载力也随干密度的增加而增加,但达到一定限度后,强度随干密度增长反而降低,这种现象称为过度压实,如图 12-26、图 12-27 所示。

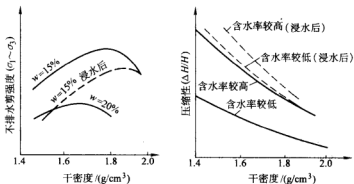


图 12-26 不排水抗剪强度、压缩性与干密度的关系

2. 抗拉强度

在高土石坝,粘土心墙防渗体是否发生裂缝是较为重大的问题,裂缝与粘土的抗拉性能有关。抗拉性能可用抗拉强度、最大拉伸应变、拉应力和拉应变的关系来反映,其中以抗拉强度值较为稳定可靠。目前研究土的抗拉强度试验方法有:单轴拉伸法、土梁弯曲试验法和劈裂法,其中单轴拉伸法是国内外研究土的抗拉性能最常用的方法。

研究成果表明,粘性土的抗拉强度 σ_p ,随土的干密度增加而增加,随土的含水率增加而减小,如图 12-28 所示。

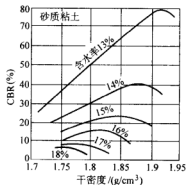


图 12-27 CBR 与干密度的关系

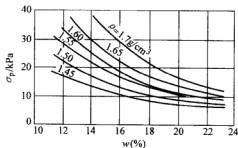


图 12-28 粘性土的抗拉强度与含水率、干密度的关系

粘性土的极限拉应变,随着土的干密度增加稍有增加,随着土的含水率增加则增加的比较明显。偏湿击实粘土虽然其抗拉强度较偏干的低,但由于具有较大的塑性,拉应变较大,不容易开裂,因此对于粘土心墙宜用“湿法”填筑。多数情况下,压实粘土的抗拉强度值在10~50kPa之间。

3. 压缩性

一般土的压缩性随干密度的增加而减小,如图12-26所示。按击实曲线上的含水率及相应的干密度制备土样,进行压缩试验,结果表明:稍低于最优含水率时,压缩性最低;浸水后,压缩性普遍增加,其压缩性最低值在最优含水率附近。

4. 渗透性

土的渗透性随干密度的增加而减小。在击实曲线上,稍高于最优含水率及相应干密度的试样,渗透系数最低。

5. 膨胀性

粘性土的浸水膨胀性与粘土矿物、含水率和干密度有关。膨胀量、膨胀力与含水率和干密度的关系如图12-29所示。

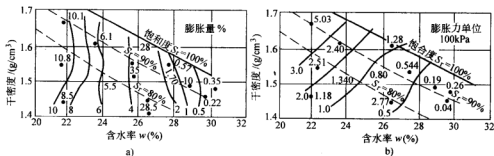


图 12-29 膨胀量、膨胀力与含水率和干密度的关系

从图12-29中可以看出,干密度增加,膨胀力显著增加。因此,对于膨胀性粘土,为了使土的膨胀性不致过大,应控制填土的压实度,而含水率最好略高于最优含水率。

12.4 填方工程的设计、施工与质量控制

12.4.1 填方工程的填筑与压实设计

1. 填料的选择

选择哪一种土或哪几种土料作为填筑材料,是填方工程设计的一个重要组成部分,填筑土石料的选择要根据填料储量、填料运距及填料物理力学性质等综合

比选确定,选择填料的基本原则是:就近取材、因材设计,即不是根据设计指标去寻找土石料,而是将不同性质土料合理配置在填筑体适当部位。

2. 压实质量控制标准设计

(1) 粘性土、粘性粗粒土填方工程

在粘性土、粘性粗粒土填方工程的填筑设计中,采用压实度作为压实控制标准,设计指标有干密度和含水率。设计原则是选用合适的含水率及干密度,使填料填筑时能达到设计的抗剪强度、一定的渗透系数和较小的湿化变形。

填料含水率的要求:根据击实试验得到的最优含水率来确定填筑含水率。对于今后将浸水的填方,宜采用“湿法”填筑,即填筑含水率 $w = w_{opt} + (1\% \sim 2\%)$,这样的填筑可以使得填方体具有较高的强度、较好的塑性和较小的湿化变形。

填土干密度 ρ_d 的要求:填筑施工时应分层碾压,要求分层碾压后填土压实度 K_c 达到设计标准,即 $\rho_d \geq K_c \times \rho_{dmax}$ 。如《碾压式土石坝设计规范》SL274—2001 中规定,对于 1 级、2 级坝和高坝,粘性土的压实度为 98%~100%;《公路路基施工技术规范》JTJ033—1995 规定,无论路堤多高,都要求路基下部(自路面底面计起的深度范围大于 150cm)的压实度 $\geq 90\%$ 。

(2) 无粘性粗粒土 在粗料的压实中,常采用相对密实度 D_r 作为压实标准,已被列入各国的设计规范中。我国现行的《碾压式土石坝设计规范》中要求:无粘性土的相对密实度 D_r 不低于 0.70~0.75;现行的《水工建筑物抗震设计规范》中规定:无粘性土填筑位于浸润线以上部位时,相对密实度 D_r 不低于 0.70,无粘性土填筑位于浸润线以下部位时,相对密实度 D_r 不低于 0.75~0.85;美国陆军工程师兵团土石坝填筑标准(1984 年)规定:无粘性土填筑时相对密实度 D_r 的平均值不低于 0.85,且在任何部位均不小于 0.80。

以相对密实度作为压实标准,在砂砾石、砂卵石等粗料的压实中应用较多。对于以碎块石和碎石土为主,属石料填筑,堆石料的粒径很大,目前尚无成熟、可以作为规范标准的测定最大和最小密度的方法,可采用《碾压式土石坝设计规范》(SL274—2001)中规定:堆石的压实功能和设计孔隙率 n 可以按已有的工程经验拟定,一般为 0.20~0.28,并由碾压试验确定;施工时以施工参数(碾压设备型号、重量、振动频率、铺填厚度、加水量、碾压遍数等)及干密度同时控制。即采用孔隙率 n 或干密度或碾压参数作为堆石的压实标准。

3. 填筑方法设计

不同填筑高程和不同区段部位有不同填筑压实方法和标准、压实遍数、铺土厚度、碾压方式(碾压方向从填土区两侧逐渐压向中心,每次碾压应有 20cm 的重叠)、行驶速度。

每层碾压完毕后应立即进行压实度的检测,压实度不满足设计要求,则应适

当增加碾压次数或对填土层厚、含水率作必要调整，直至满足要求。

12.4.2 填方工程的施工

1. 土料填筑含水率的控制和调节

土石坝填筑含水率和填筑标准的规定，主要以土的室内击实试验及相对密度试验结果为基础，并适当考虑填方体的等级、高度，气候条件和土的天然状态等因素。

能自由排水的无粘性粗粒土和堆石，完全干燥状态或饱和时压实干密度最大，中间潮湿状态压实干密度最低。这些材料天然状态多处于潮湿状态，现场施工不可能达到完全干燥状态，为了易于压实，一般均要求达到很湿或接近饱和状态，没有含水率的上下限要求。

对通过击实试验能测定最优含水率的粘性土、粘性粗粒土，均须规定填筑含水率的上下限。填筑含水率一般控制在最优含水率附近，当含水率低于最优含水率时，孔隙压力低，强度高；但过干时，浸水后将产生较大的附加沉陷，而且碾压时容易出现干松土层，土的结构不均匀，有较大孔隙，渗透性显著增加。当含水率高于最优含水率时，填土的塑性增加，结构均匀，渗透性降低，但孔隙压力显著增加，强度降低；含水率过大时，土的承载力低，碾压机械走过，填土表面有很大起伏，即形成所谓的“弹簧土”，不但碾压机械工作不方便（如粘碾轮，羊足入土深度大，气胎碾车辙很深等），而且会因过度压实，发生剪切破坏现象。

填筑土坝心墙时，为了增加心墙的塑性，降低渗透性，控制填土含水率使其略大于最优含水率时有利。为了使砾石土、风化料压实后结构均匀，降低其渗透系数，控制含水率偏湿侧有利；在均质土坝上下游坝壳位置的填土，为了提高强度，保证施工期的稳定，可控制含水率略低于最优含水率；潮湿多雨地区，土料天然含水率偏高，可控制填土含水率偏高；气候干旱，土料天然含水率偏低，可控制填土含水率偏低。

确定填土含水率的上、下限的方法有：F.C.Walker与W.G.Holtz室内试验方法和规范规定的方法。F.C.Walker与W.G.Holtz室内试验方法主要是根据湿陷和孔隙压力来确定含水率的上、下限，填土含水率下限是指在上部填土荷重下，浸水饱和后不产生附加沉陷的最低含水率；填土含水率的上限是设计允许的最高含水率，在此含水率产生的孔隙压力不致使堤坝的安全系数降低到不能允许的地步。我国土石坝设计规范规定，粘性土的填筑含水率一般应控制在最优含水率附近，其上下限偏离最优含水率不超过 $\pm(2\% \sim 3\%)$ ；美国工程师兵团规定，不透水料和半透水料的填筑含水率范围为最优含水率的 $-2\% \sim +3\%$ 。

土石料填方对土料含水率有比较严格的要求，如料场土的天然含水率过湿或

过干，天然含水率高于或低于设计要求的含水率上、下限时，事先须进行土料含水率调节，设法增加或降低土的天然含水率，使其满足设计要求。

2. 水平碾压的行车路线方式

除边坡有少量斜坡碾压外，土石方填筑主要是水平分层填土、分层压实。水平碾压的行车方式，是指施工时，碾压机械在填筑面上采取的行走路线，使各处均能达到规定的碾压遍数，防止产生漏压，尽量减少超压，保证碾压均匀。目前比较通用的行车路线方式有：进退错距方式、圈转错距方式。

3. 斜坡碾压

碾压时为了保证碾压机械的安全，靠近边坡部分，碾子不能紧靠边坡边缘行走，必须留有一定的宽度，这部分填土碾压不到；另外，靠边坡的填土，碾压时没有侧向束缚，填土不易压实。因此靠近边坡有一定宽度未被压实的虚土。

地震区的土石坝，地震时沿边坡表层安全系数最低，特别是无粘性土，由于碾压不密实，容易产生滑动，因此斜坡碾压很重要。由于振动碾自重较轻，斜坡碾压均采用振动碾，无粘性土及石料用牵引式振动碾，粘性土用牵引式振动凸块碾。一般先静压（上下均不振动），然后半振动碾压（振动碾向上行走时振动，向下行走时不振动），斜坡碾压习惯上规定上、下往返压一次称一遍，如希拉塔面板堆石坝垫层料斜坡碾压要求：静压两遍、半振两遍和全振八遍。

一般每填筑高度 10~12m，用振动碾进行斜坡碾压一次。

4. 粘性土填筑的压实

粘性土压实一般采用羊足碾、凸块碾、网格碾、振动碾和夯板等，一般要注意以下事项：

1) 严格控制土料含水率在施工允许的上下限范围以内，土料含水率的调整应在土场进行。

2) 散土后，应用平土机平土，保证铺土厚度不超过规定厚度的上限，而且厚薄均匀。

3) 含有粗颗粒的土料，应控制最大粒径不大于层厚的 2/3。

4) 防止由于过度碾压发生剪切破坏。

5) 对岸坡接触带，碾轮不能完全压到，应专门用夯锤等小型压实机具压实。

6) 土石坝防渗土料的压实，应尽量平行坝轴方向碾压。

7) 土石坝防渗土料的填筑，应采取进占法铺土，避免车辆将已压实的土层表面压成光面，有利于上下土层的结合良好。

5. 砂和砂砾料、堆石料填筑压实

砂和砂砾料的压实采用气胎碾、振动凸块碾、振动平碾和夯板等压实机械。压实时，应防止卸料、铺料过程产生材料分离；砂砾料的压实一般要求加水，应

保证加水满足规定要求；砂砾料的最大粒径一般不超过铺料厚度的 $3/4$ 。

以往堆石坝采用厚层抛填，靠冲量压实，同时使用高压水枪射水，冲刷集中的细粒石粉充填大的空隙，并使石块彼此易于靠拢，这样的堆石坝工后沉降量大。自 20 世纪 50 年代末，广泛采用薄层碾压堆石，大大减少了堆石坝的工后变形，使得混凝土面板坝得到迅速发展。堆石的压实，一般采用 $10 \sim 15t$ 振动平碾，当要求达到较高的密实时，最好采用重型振动碾。土质防渗体堆石坝的堆石碾压，一般不加水；面板堆石坝为了提高堆石的压缩模量，减少变形，一般加水，加水量为堆石体积的 $10\% \sim 30\%$ 。

12.4.3 压实质量控制

1. 压实质量控制

压实填方的质量控制，概括起来有以下几个方面：

(1) 确定压实质量指标

1) 粘性土的压实质量指标。粘性土的压实与其强度、压缩性、渗透性等工程性质有密切关系，粘性土的含水率及压实后的干密度或孔隙比对其工程性质都有显著影响。一般对粘性土的压实质量控制采用简单的密度和含水率试验。

采用压实度控制可以考虑土料压实性的变化，压实度标准不变，随土料压实性变化即随最大干密度值大小不同而变化，要求达到的压实干密度不同。根据填土实际最大干密度乘以设计规定的压实度求得填土压实干密度控制值。这样，只要含水率在要求的范围内，施工时，有可能选用同一种碾压参数，避免不必要的超压和补压现象。但采用压实度控制，必须已知该土的最大干密度，才能根据填土压实干密度计算其压实度，判别是否达到设计要求。因此，必须作击实试验，击实试验一两天以后才能得到结果，在坝上无法进行控制，所以，一般均采用一些快速或间接的方法求得最大干密度。

目前土石方填筑工程粘性土的压实质量控制都采用压实度控制。当土料比较均匀而且工程量不大的中、小工程才采用干密度控制。

2) 粘性粗粒土全料压实度控制与细料压实度控制。砾石土等粘性粗粒土，是粗细粒料的混合土。粘性粗粒土的压实质量控制有全料压实度控制和细料压实度控制之分。全部粗细粒混合土的压实状况指标为：全料压实干密度、全料最大干密度和全料压实度等；扣除粗粒后细粒土的压实状况指标为：细料压实干密度、细料最大干密度和细料压实度等。

粘性粗粒土采用全料压实度控制时，先根据大型击实试验求得不同粗粒含量 P_s 对应的全料最大干密度 ρ'_{dmax} ，将不同粗粒含量 P_s 的 ρ'_{dmax} 乘以压实度 K_c ，求得不同 P_s 的全料干密度控制值。

采用细料压实度控制时，先用式 (12-4) 反求得不同 P_s 对应的全料最大干

密度 ρ'_{dmax} 时细料的干密度 ρ_{dmax} 后, 除以细料击实试验得到的最大干密度得到校正系数 β , 不同 P_5 的细料干密度控制值等于细料击实干密度乘以 βK_c 。

压实度相同时, 用全料压实度控制比用细料压实度控制要求的标准偏低。

3) 无粘性土的压实质量指标。土石坝的反滤料、过滤料及坝壳砂砾料等无粘性土, 其压实质量一般都用相对密实度 D_r 控制。近年来也有采用压实度作为压实标准的, 如小浪底反滤料填筑压实后的干密度 $\rho_d \geq 95\% \rho_{dmax}$, ρ_{dmax} 采用标准振动台测得的干密度。

粘性土、粘性粗粒土的压实标准, 采用压实度 K_c 控制, 压实度确定后, 质量控制的干密度指标满足 $\rho_d \geq K_c \rho_{dmax}$ 时, 则满足压实质量要求。

(2) 对于粘性土、粘性粗粒土, 进行室内击实试验, 确定最大干密度和最优含水率。对无粘性粗粒土进行室内的最大、最小干密度试验。

(3) 粘性土料填筑前, 在料场控制填筑土料的含水率, 使含水率在最优含水率附近, 一般控制在最优含水率 $-2\% \sim +3\%$ 范围之内。

(4) 在填筑过程中随时按要求进行质量控制: 严格按设计图样控制好各种填料的边线; 控制压实参数, 并对填方体进行质量监测, 如干密度和含水率等。

(5) 对测定结果, 进行统计分析, 若 $\rho_d \geq K_c \rho_{dmax}$ 则满足控制标准; 当不满足时, 应及时采取补救措施, 如补压等, 直至达到标准为止。

2. 最大干密度测定

(1) 无粘性粗粒土

1) 无粘性粗粒土最大干密度的测定方法。各国无粘性粗粒土最大干密度的测定方法大体相同, 即用振动法测定效果较好, 但按目前各国的规范, 被测定的土料限制在某一最大粒径范围内。如美国的 ASTM (D4253) 标准规定仪器允许最大粒径 $d_{max} \leq 76.2\text{mm}$, 我国标准规定 $d_{max} \leq 60\text{mm}$, 瑞典国家标准规定试样筒的内径 D 为 150mm , 若按 $D/d_{max} = 5$ 计, $d_{max} \leq 30\text{mm}$ 等等。

2) 超径粗粒土最大干密度的确定。实际填筑土石坝的无粘性超径粗粒土, 最大粒径 d_{max} 远大于 $60 \sim 76.2\text{mm}$ 。如碧口土石坝填筑的堆石料最大粒径为 1000mm , 石头河土石坝填筑于坝体的砂卵石的最大粒径为 1000mm , 西北口混凝土面板堆石坝堆石料最大粒径为 800mm , 小浪底斜心墙堆石坝堆石料的最大粒径为 1000mm 。为了解决无粘性超径粗粒土最大干密度问题, 有许多学者进行过研究, 如 Stephenson 采用大型振动台进行试验研究, 但因振动台太大, 参数和影响因素太复杂, 没有取得满意的结果; 1972 年 R.J.Frost 提出剔除超径料的系列延伸法; 1981 年史彦文提出相似级配系列延伸法; 1987 年刘贞草提出等量代替级配系列; 1992 年田树玉等在上述研究基础上, 提出了渐近线辅助拟合法; 1989

年~1993年郭庆国等提出超径粗粒土最大干密度的近似测定方法等等。

目前对超径粗粒土的多种处理办法,如剔除超径颗粒、等量代替法、相似级配法及渐近线辅助法等,各法均有优缺点,对于大于60mm的巨粒土,因受试筒允许最大粒径的限制,宜采用按相似级配法缩小粒径的系列模型试料。

(2) 粘性土和粘性粗粒土 粘性土用击实试验确定其最大干密度和最优含水率。

美国垦务局规定,当粗粒土中细粒含量超过5%~12%时,应分别进行击实试验和相对密实度试验,比较压实度 $K_c = 0.95$ (普氏标准) 的干密度和 $D_r = 0.7$ 的干密度,采用干密度较高的值。美国工程师兵团规定,当粗粒土中细粒含量超过5%时,如果压实度98%的干密度高于相对密度0.85的干密度时,采用标准击实试验结果。

粘性粗粒土也可以用大型击实仪测定其最大干密度。对于缺乏大型击实仪设备,或习惯于采用小型标准击实仪测定细料部分的 ρ_{dmax} 和 w_{op} , 考虑粗料含量用式(12-4)~式(12-6)进行校正后,得到反映全料性质的最大干密度和最优含水率,然后与现场测定的压实填土的干密度比较,判定是否满足要求。美国ASTM D4718、《土工试验方法标准》GB/T 50123—1999和《公路土工试验规程》JTJ 051—1993都推荐该法。

3. 现场密度测定和压实度的评定

评定填方工程的压实度,需要解决三个问题:现场准确地测定密度;准确地测定含水率;利用数理统计方法评定现场压实度。目前国际上在现场测定填土的密度主要有:非破坏性试验如核子密度—水分仪;破坏性试验包括灌砂法、灌水法、环刀法。

在施工现场通常采用灌砂(水)法,它具有测算准确、适用面广的特点,对于细粒土、粗粒土均可采用。但检测速度慢,每点平均耗时在15min左右,现场难以测定试样的准确含水率,不能及时得出数据。而核子密度仪具有方便、快捷的优点,能进行碾压过程的控制,可以测出每碾压一遍压实度的变化,容易确定压路机的碾压速度和最佳碾压遍数,及时指导施工。

12.5 填土的湿化变形

12.5.1 湿化变形机理

土石料填筑体的另一个重要力学特性是浸水后会产生附加沉陷,这种现象称为湿陷;在复杂边界条件下,填筑体除湿陷外还会产生侧向变形,统称为湿化变形,由于其不同于一般受力变形故这里单独作专门讨论。水库的初次蓄水、库水位的反复升降、地下水位的上升和地表水的入渗等等,都会引起填筑体的湿化变

形。已有的研究成果表明,在土石坝等填土工程中,无论是碎石土、砂砾土或粘性土,即使是压实系数达到 90% 以上,也存在较明显的湿化变形问题,较大的湿化变形对填筑体的变形、稳定、开裂和渗透稳定都有较大的影响,而且对于土坡和建筑物地基的性状也有较大的影响,湿化既是引起土石料填筑体产生不均匀沉降和裂缝的关键因素,也是造成边坡塌滑的重要因素。

各向等压湿化变形和剪切湿化变形试验表明:

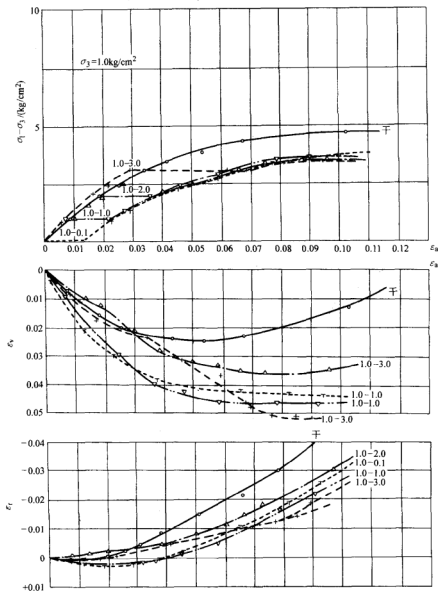
- 1) 应力水平低时,湿化变形主要为体变。
- 2) 随着应力水平提高,湿化轴应变和偏应变很快增长,并远远超过了湿化体变。
- 3) 湿化变形随围压的增大而增大,并在球应力和偏应力之间存在耦合现象。
- 4) 湿化后土体的强度明显降低。

12.5.2 湿化变形规律

在 20 世纪 70 年代之前,各国学者普遍采用在单向固结仪进行湿化变形研究,一维固结仪虽然简单易行,但其应力状态和变形条件均不符合实际情况,只能测得垂直压力和垂直湿化应变的关系,局限性大,随后国外学者采用三轴仪与“双线法”来研究湿化问题。1977 年,刘祖德利用三轴仪与“单线法”进行了张家咀水库土坝风化砂的湿化变形试验,研究了土在复杂应力条件下湿化过程中的应力—应变关系和附加湿化变形量,随后国内外普遍采用该方法进行了砂砾料、堆石料和粘性土的湿化变形试验研究。

将每一组湿化试验的结果绘成 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 与 ϵ_a 、 ϵ_s 与 ϵ_v 之间的关系曲线,如图 12-30、图 12-31。从图中可以看出:

- 1) 非饱和试样及湿化试样湿化前后的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \epsilon_a$ 关系都近似符合于双曲线关系。
- 2) 在 σ_3 为常数条件下,湿化前各土样的应力—应变曲线基本重合,且与“干样”的应力—应变曲线前段基本重合,这表明各个试样有着相似的初始条件。
- 3) 在不同应力水平下湿化,所有试样都产生了附加的轴向应变 $\Delta\epsilon_{as}$,湿化阶段的应力—应变曲线表现为近似平行的水平线。湿化后继续增加 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 直至破坏,该段应力—应变曲线近似平行,湿化后的极限强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$ 比非饱和和湿化前为低,相同的 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 值时曲线的坡度也稍小,这反映湿化使土的变形模量和强度均降低。
- 4) 在三向应力状态下,湿化变形中不仅包括土的体变 $\Delta\epsilon_{vs}$,而且包括土的偏应变 $\Delta\epsilon_{os}$;在较大的应力水平下,湿化变形绝对值与相对值 $\Delta\epsilon_{os}/\Delta\epsilon_{vs}$ 都很大; $\Delta\epsilon_{os}$ 随着应力水平的增大而增大。


 图 12-30 $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ 下风化砂湿化变形成果

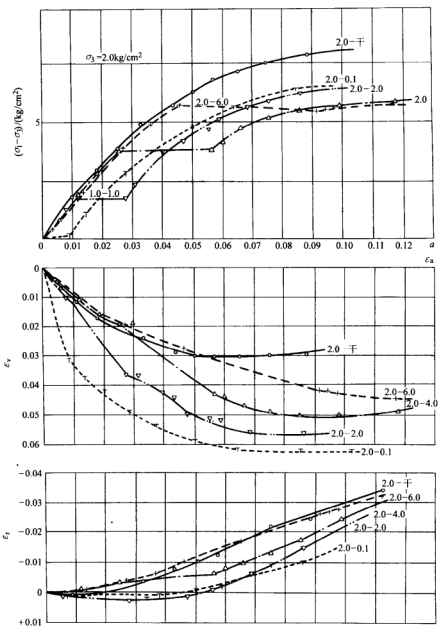


图 12-31 $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ 下风化砂湿化变形成果

5) $\Delta\epsilon_{vs}$ 和 $\Delta\epsilon_{vs}$ 随着干密度 ρ_d 的增大而减小, 这反映出干密度对湿化变形量影响较为显著。

6) $\Delta\epsilon_{vs}$ 与应力水平及围压之间的规律性不明显, 有待于进一步深入研究。

7) 在试样的干密度为 $\rho_d = 1.90\text{g/cm}^3$ 时, 当湿化点应力水平超过 $1/4$ 时, 测得土样呈剪胀特性, 其规律有待研究。

试验资料表明: 粗粒料的湿化变形具有以上类似的特征。

12.5.3 影响湿化变形的因素

1. 浸水时间的影响

浸水时间是影响湿化变形及其发展的一个重要因素。从湿化过程可以看出, 浸水初期 (20~30min) 湿化体变及轴向应变的变化都较大, 达到总变形的 70%~95%, 随着时间的延长, 浸水变形量逐渐趋于稳定, 这与材料性质和初始状态有关。例如, 密度低的粗粒土, 其湿化变形稳定的时间比密度大的要长两倍多, Ordemir (1985) 也得出同样的结论。

2. 起始含水率的影响

湿化变形量随土体起始含水率的增加而减小, 有资料表明, 粘性土、粘性粗粒土填料的起始含水率在最优含水率附近, 浸水变形量较小, 因此, 粘性土填筑含水率稍超过最优含水率 2% 左右, 采用“湿法”填筑, 可以减小填方完工后的湿化变形; 对于无粘性粗粒土, 碾压时充分加水并达到较高密实度, 可以减小堆石体的湿化变形。

3. 密度的影响

细粒土和粗粒土的湿化变形试验均表明, 湿化变形与其干密度等有关, 随着压实度的增加湿化变形减小, 严格控制压实度将有利于减少填方体的湿化变形。如巫山县污水处理厂地基的填方高度达 75m, 填筑体高程范围和三峡库区库水位涨落范围一致, 填筑体修建完成后要经受库水位反复升降带来的影响, 必须考虑填土的湿化变形, 施工采用“湿法”填筑、采用分层碾压加强夯的两道工序施工方法, 且施工时严格控制分层碾压的压实系数不低于 0.95, 强夯后压实系数不低于 0.98。

4. 水与荷载的作用次序

研究湿化变形有“双线法”和“单线法”两种方法。

“双线法”是分别采用风干土样和饱和土样进行应力—应变关系三轴试验, 某应力状态下的湿化变形为干、湿两条应力—应变曲线上所对应的应变之差。1973 年, Nobari 和 Duncan 首先用三轴仪、“双线法”试验研究湿化变形, 并且提出了在非线性有限元法计算中考虑湿化变形的的方法, 在 Oroville 土坝的浸水变形分析中得到应用。

“单线法”是将风干土样加载至某应力状态并维持不变，浸水饱和并测定其湿化变形，随后施加偏应力至剪切破坏。“单线法”和“双线法”的湿化变形量有差别，“双线法”改变了水与荷载对土体的作用次序，这样的应力状态与实际不符。粘性土、风化砂、砂砾料、堆石料等的湿化变形试验均表明：湿化变形试验采用“单线法”符合实际情况，“双线法”测得的应变与“单线法”测得的应变有较大差别。

参 考 文 献

- 1 刘祖德. 土坝风化砂坝壳材料的湿化变形试验研究. 见: 全国土坝压实和变形学术讨论会论文, 1982
- 2 杨荫华. 土石料压实和质量控制. 北京: 水利电力出版社, 1992
- 3 郭庆国. 粗粒土的工程特性及应用. 郑州: 黄河水利出版社, 1998
- 4 沙庆林. 公路压实和压实标准. 北京: 人民交通出版社, 1998
- 5 屈智炯, 何昌荣, 刘双光. 新型石渣坝: 粗粒土筑坝的理论与实践. 北京: 中国水利水电出版社, 2002
- 6 日本土工学会粗粒料的现场压实编撰委员会. 粗粒料的现场压实. 郭熙灵, 文丹译, 北京: 中国水利水电出版社, 1999
- 7 傅旭东, 邱晓红, 赵刚等. 巫山县污水处理厂高填方地基湿化变形试验研究. 岩土力学, 2004 (10)

第 13 章 土工问题的可靠度分析

13.1 概述

可靠性理论是在第二次世界大战后发展起来的一门科学,在宇宙飞船、电子工业和机械行业中的应用取得了巨大的成功。可靠度理论在结构工程领域发展较早,1947年前苏联的尔然尼钦提出了用一次二阶矩理论来估计结构的失效概率,美国的弗罗伊詹特(A.M.Freudenthal)在20世纪40年代开创了美国安全度的研究工作,他的工作与同年代的前苏联尔然尼钦的研究有相似之处。弗罗伊詹特所创立的国际结构安全性和可靠性会议(ICOSSAR),1969年在美国华盛顿召开了第一次会议,以后这一国际性学术会议每隔几年就召开一次。美国的康乃尔(Cornell)、洪华生(A.H.S.Ang)和邓汉忠(W.H.Tang)等发展了工程技术中应用的概率概念和方法。康乃尔于20世纪60年代后期提出了可靠度指标 β 的概念,从此二阶矩模式才得到了重视,对安全度的实际应用作出了较大贡献。

从20世纪70年代起,可靠性理论在工程结构设计中得到了广泛的应用。为了在结构设计原则和方法上进行协调统一,一些国际组织于1971年联合成立了“结构安全度联合委员会”(JCSS),1986年国际标准化组织(ISO)委员会批准的国际标准《结构可靠度总则》ISO2394,就是以概率理论为指导制定的结构可靠度设计总原则,它作为制定土木工程结构可靠度设计原则的共同基础,对各国开展以可靠性理论为基础的工程结构设计规范改革提供了统一的原则和模式。加拿大、美国、英国、德国等据此编制了本国的工程结构可靠性设计统一标准和专业设计规范。

为了借鉴国外先进经验,1976年原国家建筑材料委员会委托中国建筑科学研究院承担“建筑结构安全度及荷载组合”的科研课题,为建筑结构设计采用概率极限状态设计方法打下了良好的基础。1979年下达了编制《建筑结构设计统一标准》的任务,经过全国三十几个单位的共同努力,《建筑结构设计统一标准》GBJ68—1984于1985年1月1日正式颁布实施。它率先采用以概率论为理论基础的极限状态设计法,体现了与国际设计规范发展的一致性。此后在成功经验的基础上,由房屋建筑、铁路、公路、港口及水利水电工程结构可靠度设计统一标准的各主编单位,经建设部批准于1992年共同编制了《工程结构可靠度设计统一标准》GB50153—1992;1992年交通部主编了《港口工程结构可靠度设计统一标准》GB50185—1992;1994年铁道部主编了《铁路工程结构可靠度设计统一标准》

GB50216—1994; 1994 年原能源部、水利部主编了《水利水电工程结构可靠度设计统一标准》GB50199—1994; 1999 年交通部主编了《公路工程结构可靠度设计统一标准》GB/T50283—1999。以上情况表明, 以概率可靠度为基础的极限状态设计法, 正在土木、交通及水利各专业的工程结构设计中逐步推广。

岩土工程是可靠度理论应用的一个重要领域。早在 1956 年, 卡萨格兰德 (A. Casagrande) 提出了土工和基础工程中风险的问题。从 20 世纪 60 年代开始, Hooper, Lumb, Meyerhof 和松尾等学者开始关于土工参数统计性质的研究和资料的收集, 进而对地基的破坏概率、破坏概率与设计安全系数的关系等进行了研究; 以 Vanmarcke 和 Cornell 为主的麻省理工学院研究小组在沉降的可靠度研究中取得了较大进展。在此背景下, 从 1972 年开始, 每四年一届召开统计学和概率论在土工和结构工程方面应用的国际学术会议, 对推动岩土工程中的可靠度研究起到了很大的作用。在历届国际土力学和基础工程学术会议上都有一些有关概率论和统计学在岩土工程中应用的论文发表, 在第十一届国际土力学和基础工程学术会议上由一个专门小组讨论这一课题。由国际标准化组织岩土工程技术委员会 (ISO/TC182) 主持编制的国际标准中规定采用极限状态设计原则和分项系数方法, 并对各级岩土工程提出了可靠度指标 β 的建议值, 这是岩土工程可靠性研究进入实用阶段的标志。

我国自 20 世纪 70 年代末才开展岩土工程可靠度的研究工作, 当时美国的吴天行、Ingles 先后应邀到同济大学讲学, 介绍了国际上可靠度研究的动态, 引起了我国同行的注意。中国力学学会岩土力学专业委员会于 1983 年在同济大学举行了“概率论与统计学在岩土工程中的应用专题学术座谈会”; 1986 年在长春召开了“岩土力学参数的分析与解释讨论会”; 1989 年在上海举行了“岩土力学新方法分析讨论会”; 1990 年由长江科学院牵头成立了全国岩土工程可靠度研究攻关组。我国岩土工程可靠度的研究内容涉及土工参数的概率统计分析、地基承载力、土坡的稳定分析、挡土墙和桩基的可靠度分析等方面, 尤其在桩基可靠度研究中取得了令人瞩目的成绩。

与上部结构相比, 岩土工程中的概率设计方法的应用落后了近十年, 其主要原因是, 岩土工程可靠性研究中最大的困难在于岩土是自然产物, 其性质远比人工材料复杂, 变异性大, 和上部结构相比, 岩土工程有以下特点:

1) 岩土体是在漫长的地质年代形成的, 又经历着包括自然和人类作用所引起的各种变化, 其性质十分复杂。不仅不同地点岩土的性质可以差别很大, 即使同一均匀土层的不同点, 其性质也随位置和时间不同而不同, 即土性具有空间变异性。在传统的定值设计法中, 把一个所谓均匀土层的土性看成是等值的, 即每点的土性都一样; 将土工参数视为随机变量的概率分析方法考虑到土工参数的变异性, 将其视为单一的随机变量, 这两种方法都假定土层中每点的取值相同。

把土性视为随机变量的设计方法虽在工程上有不少成功的应用,但随之而来的一些工程失效表明这种概率分析方法未能合理处理土工参数的变异性。同时对现有岩土工程的可靠度校核计算表明其可靠度指标 β 的计算值偏小,而结构并未失效。这表明将土工参数视为随机变量的概率分析方法既不能合理地处理土性的变异性也未能考虑土性的空间平均性质。

2) 由于勘察数量有限,常常不能满足概率分析的要求,对土工参数的取值要充分利用测试数据,这些数据可能来自不同的测试手段,为了提高可信度可使用贝叶斯估计方法。土工参数在某些情况下也要依赖于经验数据,经验数据应该大范围的概括,对某一具体的工程又必须进行一定数量的试验作为校核;但是试验数量毕竟有限,因而数据可靠性较低。贝叶斯方法是联结“经验”和“试验”的桥梁。先验概率是岩土的大母体,样本数量多;而某一工程地区试验数据是来源于同一母体且在经验数据已知的情况下得出的,因而试验概率是条件概率。试验进行后,对先验概率要重新估计,可采用全概率公式。

3) 土性指标不仅存在自相关性,而且不同的土工参数之间还存在相关性。如对于粘土,其粘聚力 C 和有效内摩擦角 $\tan\phi$ 之间存在较强的负相关性,其相关系数在 -0.5 左右,而容重和摩擦角之间则存在正相关性。

4) 岩土工程中失效模式及计算方法都与上部结构有很大的区别。土工参数的离散性大,尤其是与强度、稳定及变形密切相关的力学指标的变异性大于物理指标的变异性,变异系数一般大于 0.3 ;同时岩土是高度非线性材料,相应的极限状态方程往往为非线性。用结构可靠性分析常用的“JC”法来计算时,计算结果有时误差较大,因此在岩土工程可靠性分析中,使用较精确的计算方法如 Monte-Carlo 模拟十分必要。

此外,岩土工程中土工参数的概率分布比较复杂,力学指标一般不服从正态分布;对于可靠度计算结果有较大影响的随机变量,应确定其精确的分布,使计算结果更符合实际。

13.2 概率分析在土工问题中的应用

13.2.1 土性参数的概率分析

由于土的形成方式和组成材料的多样性,土成为一种很不均匀的材料,表征土的性质各种参数具有较大的离散性。即使在大致均匀的土层中,不同地点的土性也存在变异性,由于不能测得土层中每一点的性质,因此,将土性参数用概率统计理论来描述其变异是十分必要的。

1. 土性参数的不确定性分析

土性参数的不确定性来源于以下三个方面:

(1) 固有变异性 δ_A 即使在大致均匀的土层中, 在各点的土性也不完全一样; 而且地基土层绝非均质, 土性在点与点之间是变化的, 在水平方向变化较缓慢, 而在垂直方向则变化较剧烈。同样, 若以一定范围的土性而言, 土性的空间均值也存在着不确定性, 尽管空间均值的变异性通过平均效应后比“点”的变异性有所减小。土性在空间 D 中均值的固有变异性 δ_A 为

$$\delta_A = \Gamma(D)\delta \quad (13-1)$$

式中 $\Gamma(D)$ ——方差折减函数;

δ ——土性指标的“点”变异系数。

(2) 统计不确定性 δ_0 这是由于一般的室内或现场试验均存在着试验误差, 加之上述的土性的固有变异性, 故一点的土性统计量 (均值、方差) 不可能依据有限个数的土样完全确定。这种不确定性的来源可以随试样数量增多而减小, 因此称为统计不确定性。对于 n 个独立的试验数据 X_1, X_2, \dots, X_n , 土性 X 的均值 \bar{X} 、该均值的方差的估计值 $\text{Var}(\bar{X})$ 分别为

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (13-2)$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right\} \quad (13-3)$$

由于样本不足的变异系数为

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\text{Var}(\bar{X})}{\bar{X}}} \quad (13-4)$$

(3) 系统不确定性 δ_N 这指的是土性参数测试中的条件与实际状况有出入而引起的误差。例如由于取样扰动、试件尺寸效应、应力条件的差别、剪切速率的大小, 逐渐破损的影响, 取值标准的不同等因素引起的误差而带来的变异性, 这种误差不一定会随取样的增多而减小, 因为试验条件既然相同, 其试验成果就几乎会一致地偏高或偏低, 用经验公式估算的土性指标也会出现类似的情况, 这些都属于系统误差, 故称为系统不确定性。

若以 X_i 表示某一空间范围内现场原位土性的平均值, X_A 代表同一范围内土性的实测平均值, N_1, N_2, \dots, N_m 为考虑现场原位与实验室之间的各种差别引起的偏差的校正系数, 则有

$$X_i = \prod_{i=1}^m N_i \cdot X_A \quad (13-5)$$

各种校正系数的值大约在 0.9 ~ 1.06, 设校正系数在该范围内为均匀分布, 则总的校正系数 N 为 0.98, 而系统误差的变异系数 δ_N 为各 N_i 的变异系数 δ_{N_i} 的综合值

$$\delta_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_{N_i}^2} \quad (13-6)$$

上述三种不确定性中,固有变异性是天然存在的,不能人为地扩大或减小。系统不确定性可以造成一致偏大或偏小的结果,不因为试验数量的增大而使变异性减小,但将随着试验技术的改进而减小。统计不确定性随试验数量增多而减小,但是按土层剖面的概率模型(随机场理论),试验数量将受制于区域内独立试样的个数,所以也不能无限制地增多。因此土工参数的不确定性总是存在的。根据上述不确定性的分析,W.H.Tang等人建议土性的变异系数 δ (标准差与均值的比值)用式(13-7)表示

$$\delta = \sqrt{\delta_0^2 + \delta_N^2 + \delta_A^2} \quad (13-7)$$

式中 δ_A ——土性的固有变异性;

δ_N ——系统不确定性;

δ_0 ——样本不足引起的不确定性。

据 M.S.Yuceman 等人的研究,土性的固有变异性 δ_A 为 0.2~0.3 (极限值为 0.11~0.14)。由于试样扰动、尺寸效应、剪切速率、各向异性、受力状态、逐渐破坏等方面的差别所引起的变异系数 δ_N 为 0.24 左右。由于试验数量不足引起的变异性 δ_0 与试验数量 n_0 有关,它近似地等于 $\delta_A/\sqrt{n_0}$,若试验数量在 10~20 之间,那么该项不确定性值约在 0.05~0.1 左右,这样,土的性质的总的变异系数约为 0.3~0.35。

2. 土性参数固有变异性的“点”概率特性分析

土性参数一般由试样的测定值来反映,就试样的大小和取样位置而言,它近似于散布在土层中的点,是反映某“点”土性的特性。这种由小试样测得的土性称之为“点”特性,其统计性质由均值、方差(或标准差)和变异系数来描述。

用随机变量 X 代表某土性指标,设 X_1, X_2, \dots, X_n 为随机变量 X 的一组样本,经过异常值删除后,其均值 \bar{X} 、方差 $\text{Var}(X)$ (或标准差)和变异系数 δ 的表达式为

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (13-8)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (13-9)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (13-10)$$

$$\delta = \frac{\sigma}{\bar{X}} \quad (13-11)$$

变异系数是标准差与平均值的比值,可以用来比较不同指标的变异性,是一个很有用的统计参数。Lumb、Ingles 和 Harr 等对土性参数的变异系数进行过系统的研究,研究成果表明:力学指标的变异性大于物理指标,孔隙比、含水率、重度和液塑限等土性参数近似服从正态分布,粘聚力和内摩擦角一般不服从正态分布。土性参数的变异系数值见表 13-1。

表 13-1 土性参数的变异系数

土性参数	变异系数 δ	资料来源
天然含水率	(0.18)	Kulhawy 1992, Phoon 1993
液限及塑限	(0.11)	Kulhawy 1992, Phoon 1993
重度	0.04 ~ 0.16(0.07)	Chembini 1993, Kulhawy 1993
天然孔隙比	(0.20)	Kulhawy 1992
SPT 的“N”值	0.15 ~ 0.50	Barker 1991, Meyerhof 1993, 1995
CPT 的端阻 q_c	0.15 ~ 0.37	Barker 1991, Meyerhof 1993, 1995
内摩擦角	0.05 ~ 0.25(0.13)	Cherubini 1993, Meyerhof 1993
不排水强度	0.12 ~ 0.85(0.34)	Meyerhof 1993
变形模量	0.2 ~ 0.4	Meyerhof 1993
压缩指数 C_c	0.17 ~ 0.55(0.37)	Cherubini 1993
土压力	0.15 ~ 0.20	Barker 等 1991; Meyerhof 1993, 1995

注:括号内的数值为变异系数 δ 的均值。

Meyerhof 根据变异系数的大小,将变异性划分为以下几个等级:很低, $\delta < 0.1$, 如恒载、静水压力、土体密度等;较低, $0.1 \leq \delta < 0.2$, 如孔隙水压力、内摩擦角等;中等, $0.2 \leq \delta < 0.3$, 如活载、粘聚力等;较高, $0.3 \leq \delta < 0.4$, 如固结系数等;高, $0.4 < \delta$, 如渗透性等。

(1) 土性参数的标准值的确定原则 所谓的标准值是指按概率方法的一种取值,在欧洲称为特征值。设随机变量 X 的概率分布函数为 $F_X(x)$, 按某一规定的概率 α ($0 < \alpha < 1$), 取其分布上相应的某个分位值 Z_α , 即

$$P\{X > x_K\} = 1 - F_X(x_K) = \alpha \quad (13-12)$$

则 x_K 就定义为随机变量 X 的标准值。如果随机变量 X 按正态分布,则可以采取下列表达式

$$x_K = \mu_X \pm Z_\alpha \sigma_X \quad (13-13)$$

式中 Z_α ——标准正态分布的上 α 百分点。 α 值取决于工程的重要性和设计工作阶段,一般取 0.05;对于特别重要的工程可提高要求,将风险降低到 0.01;对于初步设计阶段和可以允许承担较大风险的场合,可取 0.10 或更大一些。

在确定土性参数标准值时要考虑到以下几点：该土性参数要有完整的定义，便于测量；要考虑该土性参数的概率分布；要给定合理的统计检验方法。另外，测量中的统计误差要较小。根据 Been 和 Jefferies (1993) 的研究成果，标准贯入试验 (SPT) 测定土工参数标准值时，由于其中包含的个人误差太大，因此 N 值作为确定参数特征值不大合适。

式 (13-13) 适用于大子样的情况，用于地基设计时，有两个原则的问题必须要引起注意，其一是目标总体划分；其二是参数估计方法的选择。

即使对于同一种土类，在全国范围内作为一个目标总体提取统计子样的做法也值得商榷。这是因为地基设计用的土性指标应当由工程勘察报告提供，所给出的统计参数反映了工程场地土性指标客观的变异性与主观因素（取样方法、样品数量不充分等）造成的不确定性。在全国范围内资料统计变异系数的方法与工程设计的实际情况不相符合。全国性规范所提供的一些设计参数，例如地基承载力、单桩承载力等可以在初步设计或缺乏资料时采用，但只能给出其平均趋势，而不可能也不应当给出每个工程场地这些设计参数的变异性趋势。因此计算公式中 σ_X 是以场地为目标总体统计出来的，而不能以全国为目标总体来统计。

土性参数的标准值作为置信概率 $1 - \alpha$ 的分位数，从统计学的观点来说就是对参数进行估计。根据子样统计的结果进行参数估计的方法有两种，一种是预估总体平均值的置信区间，另一种是预估单个测定值的置信区间，这两种方法各适用于不同的情况，得到的结果也相差甚远。究竟采用何种方法，取决于所研究问题的性质。如果以最薄弱环节出现失效为控制依据，土性参数标准值可以用后一种估计方法来计算；但如以整体失效来控制，就应当用前一种估计方法。对于取置信下限为标准值的指标，用后一种方法的取值比前一种方法要小得多。以标准贯入的击数为例来说明，两种方法的置信下限公式各为：预估总体平均值置信下限，则 $N_a = \mu_N - 1.645\sigma_N$ ；预估单个测定值置信下限，则 $N' = \mu_N - 1.645\sigma_N$ 。前者中的 σ_N 是标贯击数平均值 \bar{N} 的标准差，后者中的 σ_N 是标贯击数的子样标准差，均值标准差 σ_N 可以按不同的方法来估算，用随机变量模拟方法，在严格保证各子样独立同分布的条件下， $\sigma_N = \sigma_N / \sqrt{n}$ ， n 为样本数量。当用标贯击数来预估地基承载力时，所要求的是估计地基的整体强度而不是某一点的强度，此时应当用前者而不应当用后者。

(2) 实验数据异常点的剔除 对于比较复杂的情况，可以根据概率统计中的“置信区间”来检查实验数据，以确定是否要舍弃一个含粗差或实际上是来自其他母体的数据。常采用以下三种方法：

1) Grubbs 法。设 X_1, X_2, \dots, X_n 为随机变量 X 的一组样本，其均值为 \bar{X} 、标准差为 σ 。若 X_0 为可能舍弃的数据，则计算式为

$$T_0 = \frac{|X_0 - \bar{X}|}{\sigma}$$

舍弃值的 Grubbs 临界值用 T 表示 (查表 13-2), 若 $T_0 > T$, 则 X_0 这个数据必须舍弃。重复该过程, 以检查剩余数据中是否有需要剔除的, 直到在留下的数据中再也没有可以被剔除的数据为止。

表 13-2 舍弃值的 Grubbs 临界值 T

样本数 n	置信水平 $1 - \alpha$		样本数 n	置信水平 $1 - \alpha$	
	95%	99%		95%	99%
3	1.15	1.15	12	2.29	2.55
4	1.46	1.49	13	2.33	2.61
5	1.67	1.75	14	2.37	2.66
6	1.82	1.94	15	2.41	2.71
7	1.94	2.10	20	2.56	2.88
8	2.03	2.22	25	2.66	3.01
9	2.11	2.32	30	2.75	3.10
10	2.18	2.41	40	2.87	3.24
11	2.23	2.48	50	2.96	3.34

2) 3σ 法则。样本较多时, 如果实验数据的总体 X 为正态分布, 则其均值有 99.73% 机会落在以下的样本值范围内: $[\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$, 因此在实验数据中, 出现大于或小于 3σ 的数据点的概率是很小的, 根据上式, 在实验数据整理过程中, 标出大于 $\bar{X} + 3\sigma$ 、小于 $\bar{X} - 3\sigma$ 的实验数据作为异常点, 供进一步分析参考或舍弃, 这种方法就是 3σ 法则。

3σ 法则对应的置信水平 $1 - \alpha$ 为 99.73%, 进行实验数据取舍时应注意, 只有在实验数据总体的正态性假定成立时才可用, 否则误差很大, 根据中心极限定理, 当样本数较多时, 其均值近似为正态分布, 因此, 当实验数据较多时 (一般 $n > 30$), 用 3σ 法则进行取舍是可行的。

3) 样本较少的情况下数据取舍原则。在土性参数的测定实验中, 一般 n 很少能达到 30。在样本数不多的情况下, 实验数据总体的正态性假定不再成立, 这时应该采用 t 分布的概率值来代替正态分布的概率值。

给定置信水平 $1 - \alpha$, 则其均值落在样本值范围内 $\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ 的概率为 $1 - \alpha$, σ 为样本标准差。在实验数据整理过程中, 标出大

于 $\bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 、小于 $\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 的实验数据作为异常点,供进一步分析参考或舍弃。

(3) 最小样本数 样本容量的大小反映了人们对客观事物了解的详细程度。对于变异系数较小的指标,可以容许用较少的样本容量;如果指标的变异系数比较大,则应取更多的样本容量以便能更详尽地了解指标的变异情况。当然,样本容量越大所需的勘探试验费用也越大,但在统计修正系数的取值上可以使设计参数取得更合理,以便可以有把握地降低工程造价。因此在确定取土试验数量时要综合考虑技术和经济两个方面。

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为随机变量 X 的一组样本,样本均值为 \bar{X} 、标准差为 σ 、变异系数为 δ 。如果其平均值以 $1-\alpha$ 置信度落于区间 $\bar{X} (1 \pm \Delta)$, 则所需要的样本数参见表 13-3。

表 13-3 估计平均值用的最小样本数 (Lumb, 1974)

置信度 $1-\alpha$	Δ/δ					
	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0
99%	110	30	16	10	7	5
95%	64	18	9	7	5	4
90%	45	13	7	5	4	3

根据初次现场勘测所得的样本,样本数为 n_0 , 估计其变异系数 δ , 按表 13-3 找到所需的最小样本数 n , 如需要取更多的土样,可再取 $n - n_0$ 个土样。下面举例说明。

例:从一硬粘土层中取得四个原状土样本,对样本作不排水三轴试验得出下列 c_u (kPa) 值: 102、98、95、109。为使现场土体的不排水抗剪强度能以 95% 的概率落在试验结果平均值偏离 6% 的范围以内,求必需的粘土样本的最小数目。

样本数 $n_0 = 4$ 、样本均值 \bar{X} 为 101kPa、标准差 σ 为 6.06kPa、变异系数 δ 为 0.06。要求其平均值以 95% 置信度落于区间 101 ($1 \pm 6\%$), $\Delta = 6\%$, $\Delta/\delta = 0.06/0.06 = 1.0$, 查表知最小样本数 $n = 7$, 应再取三个土样。

(4) 数据分析的 Bayes 方法 在土工中,土性的数据可能有不同的来源,使用不同的方法,或者使用比较简单的方法去推测比较复杂的力学指标等等。若要将这些数据和信息充分利用起来,可以使用贝叶斯 (Bayes) 估计方法,使最后所得的参数指标更为合理和完整。

设子样可能处于 n 个不同状态 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 中的其中之一 (θ_i 为互斥

的), 现在观察到一个输出或事件 R , 根据 Bayes 法则, 真实状态为 θ_i 的概率 (已观察到 R) 是正比例于在真实状态为 θ_i 的条件下观察到 R 的概率乘以真实状态为 θ_i 的概率, 即

$$P[\theta_i | R] = \frac{P[R | \theta_i]P[\theta_i]}{\sum_{i=1}^n P[R | \theta_i]P[\theta_i]} \quad (13-14)$$

式中 $P[\theta_i | R]$ ——在观测到 R 之后, θ_i 的后验概率, 通常写作 $P'(\theta_i)$; $P[\theta_i]$ 称为在试验以前的先验概率, 通常写作 $P'(\theta_i)$; $P[R | \theta_i]$ 为在给定 θ_i 条件下 R 的条件概率, 称为似然函数, 计为 $L(\theta_i)$ 。

例: 某土质路堤由粘性土填筑而成, 为了估计该路堤的密实程度, 根据土体的无侧限抗压强度 q_u (kPa) 将其划分为三种状态: $q_u < 24\text{kPa}$ 时为 θ_1 , 松软; $24\text{kPa} \leq q_u \leq 48\text{kPa}$ 时为 θ_2 , 较坚硬; $q_u > 48\text{kPa}$ 时为 θ_3 , 坚硬。根据路堤的填筑和使用情况, 路堤密实度分别为这三种状态的概率分别为: $P'(\theta_1) = 0.3$ 、 $P'(\theta_2) = 0.5$ 、 $P'(\theta_3) = 0.2$ 。

测定土样的无侧限抗压强度, 可以得到较为准确的数据。对于一个给定的真实状态, 对于一个测试数据 R , 其代表状态的概率 $P[R | \theta_i]$ 如表 13-4 所示。

表 13-4

对于一个土样作试验得到的 q_u/kPa	土体的密实度 θ_i		
	θ_1 : 松软	θ_2 : 较坚硬	θ_3 : 坚硬
$q_u < 24\text{kPa}$	0.7	0.3	0.01
$24\text{kPa} \leq q_u \leq 48\text{kPa}$	0.29	0.6	0.19
$q_u > 48\text{kPa}$	0.01	0.1	0.8

若测试数据 $R = 30\text{kPa}$, 处于状态为 θ_2 (较坚硬), 后验概率为:

$$P'(\theta_1) = \frac{0.3 \times 0.3}{0.3 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2} = \frac{0.09}{0.41} = 0.2195$$

$$P'(\theta_2) = \frac{0.6 \times 0.5}{0.3 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2} = \frac{0.3}{0.41} = 0.7317$$

$$P'(\theta_3) = \frac{0.1 \times 0.2}{0.3 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2} = \frac{0.02}{0.41} = 0.0488$$

以上计算表明, 还存在约 22% 的机会, 土堤的密实状态可能为松软的。

3. 土性参数自相关特性的概率分析

在早期概率分析中, 求出土性参数的“点”均值、“点”方差等概率特征参数后, 直接作为基本数据进行概率计算, 这就无异于假定地基土层不存在点与点

之间的空间固有可变性,即土层在不同位置上的概率特性是一样的,或者说是完全相关的,对某土性只要用一个随机变量就可描写整个土层的概率特性了。显然,这不符实际情况。为此有些学者从岩土工程的特点出发,研究描述地基土层的恰当的概率模型,它们将地层的土性看作一个随机场而不再以单一随机变量来表达,其中最著名的是 E. H. Vanmarcke 提出的土层剖面概率模型,该模型为跨越“点”特性与空间平均特性之间这个鸿沟提供了有效的工具。

由试样或原位测得的数据,仅仅反映土体中某一点的性质,土性指标与其所处的空间位置有关。土层中各不同位置的土性由于沉积环境的影响或多或少存在联系,间距很小的两点的土性指标十分接近,当其距离趋于零时,两点的土性完全相同;反之,随着距离的增大,这两点的土性往往不同,即土工参数具有自相关性。

(1) 土性自相关特性 对于一维平稳随机场 $\{a(Z), Z \in R\}$, 统计参数有“点”均值 μ_a 、“点”方差 σ_a^2 , 均方差 σ_a 反映土性参数 $a(Z)$ 在均值 μ_a 处的离散程度。土性指标 $a(Z)$ 在不同深度处的相关性,可以由该随机场的自协方差函数 $C_a(\tau)$ 、标准自相关函数 $\rho_a(\tau)$ 或变异函数 $\gamma(\tau)$ 来描述,即

$$C_a(\tau) = E\{[a(Z_i) - \mu_a][a(Z_j) - \mu_a]\} \quad (13-15)$$

$$\rho_a(\tau) = \frac{C_a(\tau)}{\sigma_a^2} \quad (13-16)$$

$$2\gamma(\tau) = D[a(Z_i) - a(Z_j)] = E\{[a(Z_i) - a(Z_j)]^2\} \quad (13-17)$$

式中 τ ——相关步距, $\tau = Z_i - Z_j$ 。

自协方差函数 $C_a(\tau)$ 和变异函数 $\gamma(\tau)$ 有如下的关系

$$\gamma(\tau) = C_r(0) - C_a(\tau) \quad (13-18)$$

对于平稳随机过程,自协方差函数 $C_a(\tau)$ 、标准自相关函数 $\rho_a(\tau)$ 随相关步距 τ 的增大而减小, $\gamma(\tau)$ 随相关步距的增大而增大达到极值。根据 $C_a(\tau)$ 、 $\rho_a(\tau)$ 以及 $\gamma(\tau)$ 随相关步距变化的不同,常常可以用指数型、指数平方型、三角形以及均匀型等函数来模拟。

(2) 土性参数空间平均值的概率统计特性 岩土工程的性状绝大多数取决于相应范围(长度、面积、体积)内的土性空间平均值,如土坡的稳定性取决于滑动面上的平均抗剪强度而不是某点的极限抗剪强度,摩擦桩的极限承载力取决于桩侧平均摩阻力;即使是渐近性的破坏,同样是取决于小范围内土性指标的平均值,因此在可靠度分析中需计算土工参数空间平均值的变异性(方差)。

对于一维平稳随机场 $\{a(Z), Z \in R\}$, 土性指标 $a(Z)$ 在长度 T 上的局部平均 a_T (线性平均)的均值 $E[a_T]$ 、方差 $\text{Var}(a_T)$ 分别为

$$E[a_T] = E\left\{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(Z) dZ\right\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[a(Z)] dZ = \mu_a \quad (13-19)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\alpha_T) &= \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E\{[\alpha(Z_1) - \mu_a] \times [\alpha(Z_2) - \mu_a]\} dZ_1 dZ_2 \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) C_a(\tau) d\tau = \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \rho_a(\tau) d\tau \right\} \times \sigma_a^2 \\
&= \Omega(T) \times \sigma_a^2
\end{aligned} \tag{13-20}$$

式中 $\Omega(T)$ ——方差函数。

从上知,局部平均 α_T 的方差 $\text{Var}(\alpha_T)$ 小于“点”方差 σ_a^2 ,由此可见土性指标平均后的离散程度比点指标的离散程度要小。波动幅度 θ 的定义为

$$\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} T \times \Omega(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \int_{-T/2}^{T/2} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \rho_a(\tau) d\tau = 2 \int_0^T \rho_a(\tau) d\tau \tag{13-21}$$

波动幅度 θ 的含义是:在 θ 内只能有一个独立的测点,相距 $\tau < \theta$ 的两点的土性强烈相关,在均值同一侧波动; θ 越小,土性的波动越显著。土性在空间的变异是土层在沉积过程中沉积环境、组成物质等因素随机波动造成的,代表了土性的固有变异性。

由于波动幅度 θ 与标准相关函数 $\rho_a(\tau)$ 有关,而 $\Omega(T)$ 又与 $\rho_a(\tau)$ 联系,因此波动幅度 θ 是计算方差 $\text{Var}(\alpha_T)$ 的一个重要参数。方差函数 $\Omega(T)$ 与 θ 有以下的近似关系

$$\Omega(T) = \begin{cases} 1.0 & 0 \leq |T| < \theta \\ \theta/T & |T| \geq \theta \end{cases} \tag{13-22}$$

上式和方差函数 $\Omega(T)$ 的精确表达式相比,在 $|T| \geq \theta$ 时相差无几;在 $0 \leq |T| < \theta$ 范围内,相差逐渐减小。方差函数 $\Omega(T)$ 与标准相关函数 $\rho_a(\tau)$ 有对应关系。

(3) 土性参数的波动范围计算 波动范围 θ 是反映土性指标空间变异性的一个重要参数,土性在空间的变异是土层在沉积过程中因沉积环境、组成物质等因素随机波动造成的,代表了土性的固有变异性。对于常见的自协方差函数 $C_a(\tau)$ 或变异函数 $\gamma(\tau)$,对应的波动范围 θ 见表 13-5。

表 13-5 自协方差函数 $C_a(\tau)$ 、变异函数 $\gamma(\tau)$ 对应的波动范围 θ

类型	自协方差函数 $C_a(\tau)$	变异函数 $\gamma(\tau)$	波动范围 θ
指数型	$C_a(\tau) = \sigma_a^2 e^{-\left(\frac{\tau}{b}\right)}$	$\gamma(\tau) = \sigma_a^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\tau}{b}\right)}\right]$	$\theta = 2b$
指数平方型	$C_a(\tau) = \sigma_a^2 e^{-\left(\frac{\tau}{b}\right)^2}$	$\gamma(\tau) = \sigma_a^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\tau}{b}\right)^2}\right]$	$\theta = \sqrt{\pi} \times b$
指数余弦型	$C_a(\tau) = \sigma_a^2 e^{-\left(\frac{\tau}{b}\right)} \cos(\tau/b)$	$\gamma(\tau) = \sigma_a^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\tau}{b}\right)} \cos(\tau/b)\right]$	$\theta = b$

波动范围 θ (有些文献称相关距离) 是反映土工参数空间自相关特性的指标, 是随机场理论应用于实际工程的一个非常重要的参数。实际应用时, 根据得到的 $\gamma(\tau) - \tau$ 或 $C_a(\tau) - \tau$ 曲线 (一般取 $\tau = \Delta z, 2\Delta z, \dots, n\Delta z$, Δz 为采样间距), 用指数型、指数平方型、指数余弦型或球形等函数来模拟, 从而可得到相应的 θ 值。计算 θ 时还可用递推法、平均零跨法等。

递推法是利用 $\Omega(T)$ 来计算 θ , 根据 θ 的定义, 当 T 充分大时, $\theta = T \times \Omega(T)$ 。计算时首先求 $a(Z)$ 的点方差 σ^2 , 然后依次求出土性指标在不同的平均范围 T 上均值的方差 σ_T^2 , 从而得到 $\Omega(T)$ 。在 $T \times \Omega(T) \sim T$ 图上, 当 T 充分大时 (T^*), $T \times \Omega(T)$ 逐渐增大并达到平稳, 这时 $\theta = T^* \Omega(T)$ 。

平均零跨法是利用土性变化曲线 $a(Z) - Z$ 与均值 $E[a(Z)] = 0$ 交点的平均长度 \bar{d} 来计算 θ , 当相关函数为指数平方型时, $\theta = \bar{d} \sqrt{2/\pi}$ 。

根据经验, 多数土层的垂直波动范围 θ 大都在 $0.3 \sim 1.5\text{m}$ 之间, 国外有人专门研究得出 $0.5 \sim 1.75\text{m}$ 。由于在一定范围内各点土性参数间存在着自相关性, 因此用随机变量理论来统计土性参数时要注意研究子样是否满足独立同分布的条件。

4. 土性参数之间的互相关特性

土性参数存在着相关性, 这种相关性的考虑是土工问题概率分析方面区别于结构工程的显著特点之一, 土性的相关性可分两类: 一是自相关性, 即指同一土性指标在不同位置的相关性; 另一类是互相关性, 即指两种或几种不同土性指标之间的相关性。

大量的统计分析表明, 不同的土性指标之间存在正的或负的互相关性, 如对于粘性土, 其粘聚力 c 和有效内摩擦角 $\tan\varphi$ 之间存在较强的负相关性, 其相关系数在 -0.5 左右, 而容重和摩擦角之间则存在正相关性, 土的含水率与强度则为负相关。土性互相关性问题主要在计算方法中考虑, 若土性参数之间的互相关系数较小, 可以视为独立的随机变量; 若互相关系数较大, 则必须考虑互相关性。考虑互相关性会给计算增加许多工作量, 但是, 研究表明, 在土工问题的概率分析中, 若忽略土性参数的互相关性有时会给计算结果带来很大误差, 有时误差可达 40% 左右 (吴天行和包承纲, 1986)。土性参数的互相关性是土工问题概率分析中的重要问题之一。

(1) 力学指标与物理指标之间的互相关性 根据松尾稔等学者对大阪、名古屋等地粘性土的研究, 粘性土的压缩指数 C_c 与其液限 w_L 之间存在较强的正相关关系, 参见图 13-1。

粘土的不排水强度 c_u 和其固结压力 p 之比是粘性土稳定性分析中的重要参数, 根据研究, c_u/p 与塑性指数 I_p 之间存在较强的正相关关系, 参见图 13-2。

土的密度 ρ 和其强度分量 $\tan\varphi$ 之间存在着较强的正相关性, 图 13-3a、b 分别是非饱和粉质粘土和粉质砂土进行直接剪切试验后得到的 $\tan\varphi$ 与 ρ 的关系, 图中实线是用最小二乘法求出的线性关系, 而虚线是二次多项式近似曲线。图 13-3a、b 中实线的相关系数分别为 0.60、0.57。

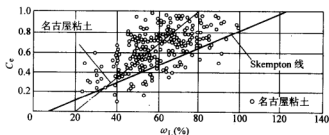


图 13-1 液限与压缩指数之间的关系

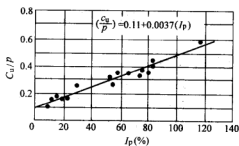


图 13-2 c_u/p 与塑性指数 I_p 之间的关系

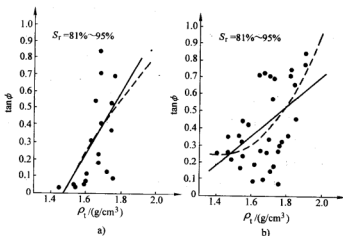


图 13-3 密度 ρ 与 $\tan\varphi$ 之间的关系

a) 粉质粘土 b) 粉质砂

粘性土的粘聚力 c 与含水率 w 之间存在负相关关系, 但是相关系数 r 较小, 可以不考虑它们之间的相关性。

(2) 粘性土粘聚力 c 与 $\tan\varphi$ 的互相关性 粘性土的强度指标 c 和 φ 是土工问题概率分析中的重要随机参数, 对某非饱和粘性土在不同含水率 w (%) 和干密度 ρ_d (kg/cm^3) 下进行直接剪切试验, 试验结果得到的 c 与 $\tan\varphi$ 的散点图, 见图 13-4, 从图中可以看出, 当含水率固定时, 则 c 和 $\tan\varphi$ 之间存在着密切的负相关性。

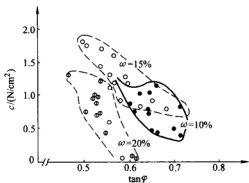


图 13-4 c 和 $\tan\varphi$ 之间的关系

与其他土性参数一样, 在统计土的抗剪强度指标时必须选择合适的统计方法。可以应用最小二乘法将若干组 (一组通常有四个样) 试验结果一次求得 c 和 $\tan\varphi$ 的“点”均值、“点”方差; 也可以分别求出每一组试验的 c 和 $\tan\varphi$ 后, 再统计若干组试验结果的“点”均值与“点”方差。通常采用后一种方法, 分组求抗剪强度指标可用作图法或线性回归法, 作图法的人为误差可能会加大或虚假地缩小子样方差、线性回归法由于数据过少 (通常只有四个), 个别数据的异常容易引起很大的误差, 有时甚至会出现 c 值为负的不合理结果。

在土工问题的稳定性分析中, 尽管实际上地基的失稳有一个逐步发展的过程, 但现有的方法都是建立在整体失稳的物理机制基础上, 因此无论是地基承载力问题、土坡稳定或土压力问题, 整体失稳是失效控制的原则, 失效概率是指整体失稳的出现概率, 而不是指地基中最薄弱点出现极限平衡状态的概率, 并且后者的失效概率大大高于前者。以最薄弱点出现失效作为控制的情况在岩土工程中也是有的, 例如防渗结构物的防渗设计中, 必须控制最易出现渗漏的薄弱环节。在土工问题的概率分析中, 是用子样的“点”标准差还是用“空间均值”的标准差, 是一个值得研究的问题, 它取决于所研究的问题采用何种失效控制原则。

土的抗剪强度指标是描述均匀土体平均强度趋势的参数, 在概率分析中应采用均值的方差而不是子样的“点”方差, 根据随机场理论, 空间均值与“点”均值相等, 而空间均值的方差应根据式 (13-20) 进行折减。空间范围要根据土体受力影响的范围来确定, 对于平面问题、用一维随机场模拟时, 其空间就用深度区间来表示; 取滑动面可能切割的深度范围内的测定值进行统计; 如用二维随机场模拟, 其空间用滑动面所通过的且为一组相互垂直的界线所界定的平面区间来

表示。

13.2.2 土坡稳定的概率分析

土坡的稳定性分析是土力学中的一个重要课题,对于水工、港工、铁路和公路等工程都有很大的实际意义。确定性的土坡稳定验算方法虽比较成熟,但实际工程中的失稳事故仍屡见不鲜,给经济建设带来巨大损失。原因在于这种确定性的安全系数法不能充分考虑各种随机变量的影响,因此,土坡稳定的概率分析方法得到了重视与发展,近年来有许多新的进展,例如,土坡稳定的运动单元法,土坡可靠性的响应面法,两个潜在滑动面之间的连续破坏概率,破坏从滑动面上一点向其他部位扩展的转移概率,考虑末端影响来确定不稳定区的长度,土坡稳定的局部安全系数等。本节中将讨论土坡稳定性分析中常用的概率分析方法。

1. 土坡稳定的失效概率

土坡稳定分析方法很多,其中大多数都可归属于极限平衡法,极限平衡法的基本假设是所假定的破坏面(它可以是平面,圆弧面,对数螺旋线曲面或其他不规则面)要满足破坏准则。对于外形比较复杂, $\varphi > 0$ 的粘性土坡,特别是土坡由多层土构成时,滑动面上的抗剪强度分布不均,且与各点的法向压力有关,故在土坡的稳定性分析中,常将滑动土体分成若干垂直土条,求各土条对滑弧圆心的抗滑力矩和滑动力矩,分别求其总和,然后求该土坡的稳定安全系数,这就是常用的条分法,其中著名的是瑞典条分法和毕肖普(Bishop)方法。

以条分法为例,土坡稳定的失效概率分析方法如下:

土坡几何参数的变异性很小,可以忽略其变异性,将其视为确定性参数。在滑动面上,由所有土条自重引起的切向力所产生的滑动力矩中,只考虑各土条重度 γ_i 的变异性(均值为 $\bar{\gamma}_i$, 方差为 $\text{Var}[\gamma_i]$), 滑动力矩 M_s 、其均值 \bar{M}_s 和方差 $\text{Var}[M_s]$ 的计算公式如下

$$M_s = R \sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i = R \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i \sin \alpha_i \quad (13-23)$$

$$\bar{M}_s = R \sum_{i=1}^n \bar{W}_i \sin \alpha_i = R \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i V_i \sin \alpha_i \quad (13-24)$$

$$\text{Var}[M_s] = R^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}[W_i] \times (\sin \alpha_i)^2 = R^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}[\gamma_i] \times (V_i \sin \alpha_i)^2 \quad (13-25)$$

式中 R ——滑动面半径;

W_i 、 V_i 、 γ_i 、 α_i ——分别为土条 i 的重量、体积、重度和各土条法向分力与垂线的夹角。

由所有土条底部抗剪强度所产生的抗滑力矩(对滑动圆心)中,各土条的 c_i 、 $\tan \varphi_i$ 为随机变量(均值为 \bar{c}_i 、 $\tan \bar{\varphi}_i$, 方差为 $\text{Var}[c_i]$ 、 $\text{Var}[\tan \varphi_i]$), 且其互相关系数为 $\rho_{c_i, \tan \varphi_i}$, 抗滑力矩 M_R 、其均值 \bar{M}_R 和方差 $\text{Var}[M_R]$ 的计算公式

如下

$$M_R = R \sum_{i=1}^n \tau_{fi} l_i = R \sum_{i=1}^n (\gamma_i V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i + c_i l_i) \quad (13-26)$$

$$\bar{M}_R = R \sum_{i=1}^n \bar{\tau}_{fi} l_i = R \sum_{i=1}^n (\bar{\gamma}_i V_i \cos \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i + \bar{c}_i l_i) \quad (13-27)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[M_R] &= R^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}[\tau_{fi}] l_i^2 \\ &= R^2 \sum_{i=1}^n \{ \text{Var}[\gamma_i] \times (V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i)^2 + \\ &\quad \text{Var}[\tan \varphi_i] \times (\gamma_i V_i \cos \alpha_i)^2 + \text{Var}[c_i] l_i^2 + \\ &\quad 2 V_i \cos \alpha_i l_i \times \rho_{c_i, \tan \varphi_i} \times \\ &\quad \sqrt{\text{Var}[\gamma_i] \cdot \text{Var}[\tan \varphi_i] \cdot \text{Var}[c_i]} \} \end{aligned} \quad (13-28)$$

式中 R 、 W_i 、 V_i 、 γ_i 、 α_i 的意义同上；

c_i 、 φ_i 、 l_i ——分别为土条 i 滑动面上的粘聚力、内摩擦角和滑动面长度。

土坡稳定的极限状态函数（或安全储备）为

$$Z = g(M_R, M_S) = M_R - M_S \quad (13-29)$$

若随机变量 γ_i 、 c_i 、 φ_i 服从正态分布，且 γ_i 与 c_i 和 φ_i 相互独立，则抗滑力矩 M_R 和滑动力矩 M_S 相互独立并且服从正态分布，可靠度指标 β 和失效概率 P_f 分别为

$$\beta = \frac{\bar{M}_R - \bar{M}_S}{\sqrt{\text{Var}[M_R] + \text{Var}[M_S]}} \quad (13-30)$$

$$p_f = P\{Z < 0\} = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (13-31)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ ——标准正态分布的分布函数。

采用毕肖普 (Bishop) 稳定性方法时，有四个随机变量，它们分别是 γ_i 、 c_i 、 φ_i 和孔隙水压力 u_i ，可以采取类似的概率分析方法，用“验算点法”计算可靠度指标 β 和失效概率 p_f 。

2. 土坡渐进性破坏的概率分析

土坡失稳现象往往并不是在同一时间内滑动面上各点一起达到极限状态，可能是先从一个局部开始破裂，然后向其他部分发展，最后形成整体滑动。有时局部破坏只发展到某一部位为止而不再向其余部分扩展，此时就不会发生整体滑动。这种破坏的模式称为渐进性破坏。

不同的条件下，渐进性破坏的起始部位是不同的。在开挖的斜坡上，应力集中于坡趾，破坏从坡趾开始；而在天然边坡上，破坏可能从坡顶开始；路堤的破坏可能起源于坡顶；这些都被离心模型所证实。长期破坏很可能从滑动面端部

(坡顶或坡趾)开始;短期形成的破坏很可能起源于土坡内部,然后再向外部扩展。

在进行土坡渐进性破坏分析时,按破坏发展的机理,开始部位的土条编号序号为1,依次编号。

取第 i 个土条来进行分析,其极限状态函数或安全储备和失效概率分别为

$$Z_i = (c_i l_i + \gamma_i V_i \cos \alpha_i \tan \varphi_i) - \gamma_i V_i \sin \alpha_i \quad (13-32)$$

$$p_{fi} = P \{ Z_i < 0 \} \quad (13-33)$$

当破坏从第 i 条扩展第 $i+1$ 条时,这个扩展的部位称为结合部。如极限状态函数或安全储备服从正态分布时,则结合部需五个统计参数来描述:均值 \bar{Z}_i 和 \bar{Z}_{i+1} , 方差 $\text{Var} [Z_i]$ 和 $\text{Var} [Z_{i+1}]$, 以及相关系数 $\rho_{Z_i, Z_{i+1}}$ 。

沿着滑动面,破坏向各条块的扩展情况,可以用土条数来判别。当土坡中某一部分的破坏达到一定状态后,或者向邻近部位转移,或者不转移。当达到一定的状态后,破坏或者向或者不向邻近转移,破坏不再进一步扩展就达到了吸收状态,例如,当滑动面上最后一个条块也达到破坏后(即当转移阶段数 $i =$ 土条数 n 时),就不再发生转移,而 n 阶段的破坏概率就等于1。

假定破坏模型是连续扩展,即破坏不可能跳跃过未破坏的条块而进入其他条块。当破坏达到第 i 阶段状态时,所有 $1 \sim i$ 条块都已达到破坏。这时有两种可能性:破坏不再进一步扩展,这时的概率为 $p_{fi,i}$;也可能继续向第 $i+1$ 阶段扩展,这时的概率为 $p_{fi,i+1}$ 。

转移概率 $p_{fi,i}$ 和 $p_{fi,i+1}$ 可以用矩阵的形式来表示,定义为转移矩阵 P ,表示破坏由 i 阶段(条块)至 j 阶段(条块)的转移概率。 P 矩阵的特征为:每行在除主对角线及其相邻右边的元素以外,其余均为零;由于它代表了互斥和穷举的事件, $p_{fi,i} + p_{fi,i+1} = 1$, 即每一行元素的总和等于1;矩阵的最末一行对应于吸收状态,所以 $p_{fn,n} = 1$, 而其他元素为零。转移矩阵的形式如下

$$P = \begin{bmatrix} p_{f1,1} & p_{f1,2} & \cdots & 0 \\ 0 & p_{f2,2} & p_{f2,3} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{fn,n} = 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (13-34)$$

转移矩阵中的元素 $p_{fi,i+1}$ 表示在第 i 条块已经破坏后,第 $i+1$ 条块的破坏概率。所以,它是条件概率,表达式如下

$$p_{fi,i+1} = P \{ Z_{i+1} < 0 \mid Z_i < 0 \} = \frac{P \{ Z_i < 0, Z_{i+1} < 0 \}}{P \{ Z_i < 0 \}} \quad (13-35)$$

$p_{fi,i+1}$ 互补为 $p_{fi,i}$, 即为第 i 条块破坏中止的概率 $p_{fi,i}$ 为 $P \{ Z_{i+1} \geq 0 \mid Z_i < 0 \}$ 。若极限状态函数 Z_i 服从正态分布,根据 Z_i 与 Z_{i+1} 的相关系数,以及 Z_i 和

Z_{i+1} 的各自统计参数, 可以计算出 $p_{fi, i+1}$ 。

13.2.3 地基沉降的概率分析

地基沉降的计算, 是建筑物重要的设计任务之一, 过大的沉降变形会使建筑物和构筑物发生开裂, 影响结构的正常使用。地基沉降计算包括了绝对沉降量、差异沉降值和倾斜等内容。

地基沉降量 s 的计算结果受压缩土层厚度、荷载大小和分布形式与加载过程、地下水位和参与计算的各种土性参数等的影响。在确定性设计方法中, 这些因素都可以用定量的数值来表示, 如土的压缩模量 E_s 或压缩指数 C_c , 土层厚度 Δz , 基底附加压力 p_0 和经验修正系数 Ψ_s 等。但实际上由于土性的变异性, 土层厚度的不均匀性和荷载的不确定性, 这些参数应全部或部分地作为随机变量来处理。经验修正系数是根据计算变形和实测变形的对比分析得出的经验系数, 本身也是一个随机变量。

1. 考虑先期固结压力影响的沉降计算公式

一般的分层总和法所用的变形指标是压缩模量或压缩系数, 只适用于正常固结的土层, 在计算模型中没有反映出应力历史的影响。如果土层是超压密的, 计算结果就会偏大; 反之, 对欠压密的土层将会得到偏小的结果。在沉降计算中考虑前期固结压力的影响, 会使计算结果更加符合实际情况。

正常固结土地基的沉降量计算公式如下

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{C_{ci} \Delta z_i}{1 + e_{0i}} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \quad (13-36)$$

对于超固结土地基; 若在压缩应力作用下, $p_{0i} + \Delta p_i > p_{ci}$, 则沉降量计算公式为

$$S = \sum_{i=1}^n (S_{1i} + S_{2i}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta z_i}{1 + e_{0i}} \left(C_{si} \lg \frac{p_{ci}}{p_{0i}} + C_{ci} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \right) \quad (13-37)$$

若在压缩应力作用下, $p_{0i} + \Delta p_i \leq p_{ci}$, 则其沉降量计算公式为

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta z_i}{1 + e_{0i}} C_{si} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \quad (13-38)$$

在上述计算公式中, 压缩指数 C_c 和膨胀指数 C_s 是沿深度随机变化的随机变量; 先期固结压力 p_c 为随机变量, 它将直接影响到正常固结土层与超固结土层的划分, 试验成果表明, p_c 与深度之间可以建立一种线性回归关系。压缩土层厚度 Δz_i 的不确定性是沉降不确定性的主要来源之一, 视为随机变量。此外, 孔隙比 e_0 , 压缩应力与自重应力, 地下水波动所造成的静水压力也属随机变量,

但由于它们变异性较小, 视为确定性参数。

据估计, 在某些沉降的概率分析中, 是否考虑相关性的影响可相差 40% 左右。关于相关系数的数值, 有些文献假定为 0.5, 在有充足的资料时, 应该作具体的分析和计算确定, 在概率分析时应当考虑这些随机变量之间的互相关性; 同时亦应注意土的指标与深度之间的相关关系 (自相关性)。在上述四个随机变量中, C_c 和 C_s 都是土的压缩性指标, 故两者相关; p_c 与气候条件和上覆荷重有关, 与 C_c 和 C_s 独立; Δz_i 和 p_c 的相关性有两种情况, 因超固结土层的位置是取决于 p_c 的, 故 p_c 与 Δz_i 相关, 但与其他的土层厚度无关。因此, 在讨论随机变量的相关性时, 只需考虑 C_c 与 C_s 以及 p_c 与 Δz_i 的相关性即可。

2. 随机变量的概率分析

(1) 土层厚度 Δz_i 土层厚度为 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, z_i 为第 i 层土层底面的埋藏深度, z_{i-1} 为第 $i-1$ 层土层底面的埋藏深度。土层厚度的均值、方差分别为

$$\bar{\Delta z}_i = \bar{z}_i - \bar{z}_{i-1} \quad (13-39)$$

$$\text{Var}[\Delta z_i] = \text{Var}[z_i] + \text{Var}[z_{i-1}] - 2\rho_{z_i, z_{i-1}}\sigma_{z_i}\sigma_{z_{i-1}} \quad (13-40)$$

$\rho_{z_i, z_{i-1}}$ 为 z_i 与 z_{i-1} 的相关系数, 若第 i 层土层处于超固结状态, 则 z_i 、 z_{i-1} 都与先期固结压力 p_a 的随机特性有关, 可以认为 z_i 与 z_{i-1} 具有良好的相关性, 即 $\rho_{z_i, z_{i-1}} = 1$; 否则, $\rho_{z_i, z_{i-1}} = 0$ 。

$\text{Var}[z_i]$ 、 $\text{Var}[z_{i-1}]$ 为土层边界的方差值, 可以从钻孔资料中求得。应注意若将土层边界作为沿深度的一维随机场, 必须先检验同一土层中相邻两点的深度值是否两两互相独立, 保证所用的测值相互独立, 即当该随机场的自相关系数等于零或很小, 才能直接应用钻孔资料。

工程中划分土层或依赖地基土的颗粒组成和物理状态指标, 或根据现场触探试验资料, 由于不可能测量到土层每点的性质, 因而也就不能准确掌握土性在整个土层中的变化。对于有些成因完全相同或近似相同的土层, 可能因为试验数据的不算太大的差别而按规范规定被分作二个不同的土层, 因而相邻土层厚度存在互相关性, 按下式计算相关系数

$$\rho(\Delta z_i, \Delta z_{i-1}) = \frac{\text{Cov}(\Delta z_i, \Delta z_{i-1})}{\sqrt{\text{Var}[\Delta z_i]\text{Var}[\Delta z_{i-1}]}} \quad (13-41)$$

(2) 压缩性指标 C_c 和 C_s 土的压缩指标 C_c 和 C_s 沿土层中不同深度的试验值 C_{ci} 、 C_{si} ($i = 1, 2, \dots, n$) 可看作 C_c 和 C_s 随机场的一组样本, 它的平均值 \bar{C}_c 和 \bar{C}_s 也应该是一组随机变量。沉降分析是就一定厚度的土层而言的, 压缩指标 C_c 和 C_s 的方差也应该是随机变量在所研究的土层厚度中的平均值 \bar{C}_c 和 \bar{C}_s 的方差, 即所谓“空间平均值”方差, 而不是各个测值的所谓“点方差”。两者的

关系如下

$$\text{Var}[\overline{C_c}(\Delta z)] = \frac{\text{Var}[C_c]}{n_e} \quad (13-42)$$

$$\text{Var}[\overline{C_s}(\Delta z)] = \frac{\text{Var}[C_s]}{n_e} \quad (13-43)$$

式中 $\text{Var}[C_c]$ 和 $\text{Var}[C_s]$ ——“点”方差, 它的计算可按一般方法进行;

n_e ——Vanmarcke 当量数, $n_e = \Delta z / \theta$, 即在沿深度方向所研究的区间 Δz 内不相关的试样个数;

θ ——波动范围距离。

同一土层中的 C_c 和 C_s 存在互相关性, 其互相关系数的计算, 主要有三个步骤:

1) 列出不同深度处的 C_c 和 C_s 测值, 记为 C_{ci} 、 C_{si} 。

2) 对所列数值进行过滤, 求得新系列 C'_{ci} 、 C'_{si} 。所谓“过滤”, 是为了保证所用的数列是纯随机 (pure random) 而进行的。由随机过程理论知道, 如果某一过程的自协方差函数值很大, 或者说测得的数列不独立, 考虑这样两个过程的互相关性时就会得出过大的、不真实的互相关系数。数列经过“过滤”后, 新数列将是纯随机的 (数据皆独立, 且平均值为零)。“过滤”的程序如下

$$C'_{ci} = C_{ci} - \frac{\sum_{i=2}^n (C_{ci} - \overline{C_c})(C_{ci-1} - \overline{C_c})}{\sum_{i=2}^n (C_{ci-1} - \overline{C_c})} \times C_{ci-1} \quad (13-44)$$

$$C'_{si} = C_{si} - \frac{\sum_{i=2}^n (C_{si} - \overline{C_s})(C_{si-1} - \overline{C_s})}{\sum_{i=2}^n (C_{si-1} - \overline{C_s})} \times C_{si-1} \quad (13-45)$$

3) 计算 C_c 和 C_s 的互相关系数

$$\rho(C'_c, C'_s) = \frac{\text{Cov}(C'_c, C'_s)}{\sqrt{\text{Var}[C'_c]\text{Var}[C'_s]}} \quad (13-46)$$

(3) 先期固结压力 p_c 先期固结压力 p_c 的方差也是一个空间平均值的方差, 其计算方法与压缩性指标 C_c 和 C_s 的均值方差 $\text{Var}[\overline{C_c}(\Delta z)]$ 和 $\text{Var}[\overline{C_s}(\Delta z)]$ 的类同, 即

$$\text{Var}[\overline{p_c}(\Delta z)] = \frac{\text{Var}[p_c]}{n_e} \quad (13-47)$$

3. 地基沉降的概率分析

研究表明地基的沉降符合正态或对数正态分布。如所周知, 对于这类分布,

随机变量的期望(均值)和方差完全确定了概率密度函数,因此主要问题就是要求出地基沉降 S 的均值和方差。 S 的均值和方差可以采用一次二阶矩法来近似确定,无需事先确定其分布函数。

正常固结土地基的沉降量 S 中,有两个随机参数: C_e 和 Δz , 它们之间不存在互相关性。因此, S 的均值和方差分别为

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{C}_{ei} \bar{\Delta z}_i}{1 + e_{0i}} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \quad (13-48)$$

$$\text{Var}[S] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + e_{0i}} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \right)^2 \times (C_{ei}^2 \text{Var}[\Delta z_i] + \Delta z_i^2 \text{Var}[C_{ei}] + \text{Var}[\Delta z_i] \text{Var}[C_{ei}]) \quad (13-49)$$

对于超固结土地基的沉降量 S 中,若在压缩应力作用下, $p_{0i} + \Delta p_i > p_{ci}$, 则有四个随机参数,因此, S 的均值为

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n (\bar{S}_{1i} + \bar{S}_{2i}) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Delta z}_i}{1 + e_{0i}} \left(\bar{C}_{si} \lg \frac{p_{ci}}{p_{0i}} + \bar{C}_{ei} \lg \frac{p_{0i} + \Delta p_i}{p_{0i}} \right) \quad (13-50)$$

在 S_{1i} 中,有三个随机参数: Δz_i 、 C_{si} 和 p_{ci} , 并且 Δz_i 和 p_{ci} 存在互相关性, C_{si} 与 Δz_i 和 p_{ci} 相互独立,根据 Taylor 级数展开式的二阶近似值可以求得 Var

$[S_1] = \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n S_{1i} \right]$ 。在 S_{2i} 中,有两个随机参数: Δz_i 和 C_{ei} , 并且 Δz_i 和 C_{ei} 相互独立,根据 Taylor 级数展开式的二阶近似值可以求得 $\text{Var}[S_2] = \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n S_{2i} \right]$ 。 S 的方差为

$$\text{Var}[S] = \text{Var}[S_1] + \text{Var}[S_2] + 2\rho(S_1, S_2) \sqrt{\text{Var}[S_1] \text{Var}[S_2]} \quad (13-51)$$

式中 $\rho(S_1, S_2)$ —— S_1 与 S_2 的相关系数。

由(13-37)式可知, S_1 是与再压曲线相对应的压缩沉降量, S_2 是与原压曲线相对应的压缩沉降量,两者的区别主要是 C_s 和 C_e 的不同,其余是一样的,故可认为 C_s 和 C_e 的相关性可近似地表达 S_1 与 S_2 的相关性,而改式(13-51)如下

$$\text{Var}[S] \approx \text{Var}[S_1] + \text{Var}[S_2] + 2\rho(C_e, C_s) \sqrt{\text{Var}[C_e] \text{Var}[C_s]} \quad (13-52)$$

对于超固结土地基,若在压缩应力作用下, $p_{0i} + \Delta p_i \leq p_{ci}$, 则其沉降量计算公式中随机参数为 C_s 和 Δz , 可用类似方法计算其均值和方差。

地基沉降符合正态分布,求出 S 的均值和方差后,就完全确定了该正态分布的概率密度函数,即 $S \sim N(\bar{S}, \text{Var}[S])$ 。给定相应的概率,就可以计算出相应的沉降区间,例如,若经过概率分析,得到地基的沉降 $S \sim N(4.044, 1.6226)$, 若取概率 $P = 80\%$, 则相应的区间为 $[2.41, 5.67]$, 此表明沉降落在该区间的可能性为 80% 。

沉降的概率预测不仅可得一个可能的平均值,而且可以得到对应不同概率的沉降值区间。该结果显然要比用“确定的”方法求得的单一的值合理。一旦有了不同概率下的沉降值区间,就可以分析工程的风险和可能的损失,为整个工程的优化设计及相应的决策提供依据,这就是系统的概率设计的途径。

13.3 可靠度分析方法

13.3.1 可靠度分析的基本概念

1. 可靠性与可靠度

结构设计要解决的根本问题,是在安全适用与经济合理之间选择最经济的途径,使建造的结构满足下列各项预定的功能要求:

- 1) 正常施工和使用时,结构能承受可能出现的各种作用。
- 2) 在正常使用时,结构具有良好的工作性能。
- 3) 在正常维护下,结构具有足够的耐久性能。
- 4) 在设计规定的偶然事件发生时和发生后,结构能够保持必需的整体稳定性。

在上述功能要求中,第1)、4)两项关系到人身安全,因此称其为结构的安全性;第2)项关系到结构的适用性;第3)项关系到结构的耐久性。安全性、适用性和耐久性总称为结构的可靠性。结构可靠性的数值度量用可靠度,其安全性的数值度量则用安全度。结构可靠度是结构可完成“预定功能”的概率度量,它是建立在统计数学的基础上经计算分析确定的,并且给结构的可靠性一个定量的描述。因此,结构的可靠度比安全度具有更广泛的内涵和外延。

结构可靠度定义为:结构在规定的时间内,在规定的条件下,完成预定功能的概率。这里所说的“规定时间”是指对结构进行可靠度分析时,结合结构使用期,考虑各种基本变量与时间的关系所取用的基准时间;“规定的条件”是指结构正常设计、正常施工和正常使用的条件,即不考虑人为过失的影响;“预定功能”是指上面提到的四项基本功能。

结构设计正逐步由安全系数设计法向概率设计法转变,通常将基于可靠度的设计划分为三个水准,即水准Ⅰ、水准Ⅱ和水准Ⅲ。

(1) 水准Ⅰ(半概率设计法) 其特点是,虽然在荷载和材料强度上分别考虑了概率原则,但它把荷载和抗力分开考虑,而不是从结构构件的整体性出发考虑结构的可靠度,因而无法触及结构可靠度的核心——结构的失效概率,并且各分项安全系数主要依据工程经验确定,所以称其为半概率设计法。半概率设计法基本上分为如下三个步骤:

- 1) 按照概率取值原则确定极限状态函数中抗力变量 R 和荷载变量 S 的标准

值。

2) 半概率地 (根据工程实际经验) 规定材料设计强度及设计荷载。

3) 由材料设计强度值计算出截面抗力, 由设计荷载计算出荷载效应, 并进行判断。

(2) 水准Ⅱ (近似概率设计法) 这是目前在国际上已经进入实用阶段的概率设计法。我国《工程结构可靠度设计统一标准》(GB50153—1992) 等采用的以概率理论为基础的一次二阶矩极限状态设计方法就属于这一水准的设计方法。虽然这已经是一种概率方法, 但是, 由于在分析中忽略或简化了基本变量随时间变化的关系; 确定基本变量的分布时受现有信息量限制而具有相当的近似性; 为了简化设计计算, 将一些复杂的非线性极限状态方程线性化, 所以, 它仍然只是一种近似的概率法。

(3) 水准Ⅲ (全概率设计法) 全概率设计法是一种完全基于概率理论的较理想的方法。它不仅把影响结构可靠度的各种因素用随机变量概率模型去描述, 更进一步考虑随时间变化的特性并用随机过程概率模型去描述, 而且, 是在对整个结构体系进行精确概率分析的基础上, 以结构的失效概率作为结构可靠度的直接度量。这当然是一种完全的、真正的概率方法。目前, 该方法真正达到实用还需经历较长的时间。

2. 结构的极限状态函数

工程结构的可靠度通常受各种作用效应、材料性能、结构几何参数、计算模式准确程度等诸多因素的影响。在进行结构可靠度分析和设计时, 应针对所要求的结构各种功能, 把这些有关因素作为基本变量 X_1, X_2, \dots, X_n 来考虑, 由基本变量组成的描述结构功能的函数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为功能函数。若将基本变量组合成综合变量, 可以归结为两类, 即抗力 R 和荷载效应 S , 则功能函数为 $Z = g(R, S) = R - S$ 。

对于功能函数 Z , 可能出现如下三种情况:

$Z = g(R, S) = R - S > 0$, 表明结构处于可靠状态;

$Z = g(R, S) = R - S < 0$, 表明结构已失效或破坏;

$Z = g(R, S) = R - S = 0$, 表明结构处于极限状态。

结构的极限状态由极限状态方程加以描述, 各类极限状态方程用通式表示如下

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (13-53)$$

一般情况下, 结构的极限状态又可分为承载能力极限状态和正常使用极限状态。

承载能力极限状态对应于结构或构件达到最大承载能力或出现不适于继续承载的变形。承载能力极限状态直接关系到结构的安全与否, 任何工程结构均需做

承载能力极限状态的设计,且要求其出现的失效概率相当低。

正常使用极限状态对应于结构或构件达到正常使用或耐久性能的某项规定限值,涉及结构的工作条件和耐久程度。

目前,结构可靠度设计一般是将赋予概率意义的极限状态方程转化为极限状态设计表达式,此类设计均可称为概率极限状态设计。

3. 失效概率 P_f

设 R 为结构或构件的综合抗力, S 为综合荷载效应。失效概率定义为

$$P_f = P\{R - S \leq 0\} = \iint_D f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (13-54)$$

式中 $f_{R,S}(r, s)$ ——随机变量 R 和 S 的联合概率密度函数;

D ——失效域,确定失效域如图 13-5 所示。

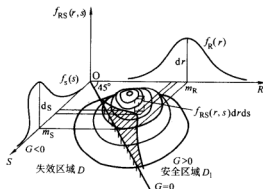


图 13-5 确定失效概率的失效域 D

当 R 和 S 相互独立时, $f_{R,S}(r, s) = f_R(r)f_S(s)$, 因此式(13-54)变为

$$P_f = P\{R - S \leq 0\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{s} f_R(r)f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x)f_S(x) dx \quad (13-55)$$

式中 $F_R(x)$ —— $R \leq x$ 的概率,或者构件的实际抗力 R 比 x 的某些值小的概率;

$f_S(x)$ ——表示作用在构件上的荷载效应 S 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,在 x 和 $(x + \Delta x)$ 之间具有某一值的概率。

可靠概率与失效概率是两个对立事件,由概率论知失效概率 P_f 与可靠概率 P_s 互补,即

$$P_f + P_s = 1 \quad (13-56)$$

4. 可靠度指标

为说明问题的方便起见, 设 R 和 S 都服从正态分布, 且相互独立, 且极限状态方程为 $Z = R - S = 0$, 则随机变量 $Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$, 此时, 失效概率 P_f 为

$$P_f = P\{Z \leq 0\} = \int_{-\infty}^{\frac{\mu_z}{\sigma_z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \quad (13-57)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ ——标准正态分布函数。

定义无量纲的系数 β , 称为可靠度指标, 则

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \quad (13-58)$$

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (13-59)$$

因此, 结构的可靠度既可以用失效概率来描述和度量, 也可以用可靠度指标 β 来描述和度量。可靠度指标 β 的计算公式 (13-58) 是在 R 和 S 服从正态分布的情况下得到的, 当极限状态方程中包含多个相互独立的正态分布随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 时, 将各随机变量标准化, 得到标准正态分布的随机变量 $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n$, 则可靠指标 β 为新坐标体系中由原点 \hat{O} 到极限状态曲面的法线垂足 P^* 的距离 $|\hat{O}P^*|$, 参见图 13-6。

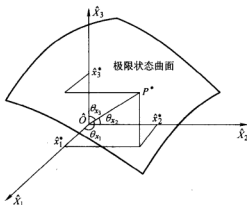


图 13-6 三个随机变量时可靠度指标 β

图 13-6 表示三个正态变量的情况, 这时可靠指标 β 是新的空间坐标系中原点 \hat{O} 到极限状态曲面的最短距离 $|\hat{O}P^*|$, 而 P^* 就是设计验算点。

13.3.2 可靠度分析的一次二阶矩方法

1. 一次二阶矩中心点法

影响结构可靠度的因素既多又复杂, 有些因素的研究还不够深入, 因此, 很难用统一的方法准确地确定各随机变量的概率分布。在早期的结构可靠度分析中, 利用随机变量的平均值 (一阶原点矩) 和标准差 (二阶中心矩) 的数学模型分析结构的可靠度, 并将极限状态功能函数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 在平均值处 (即中心点上) 用级数展开, 使之线性化, 然后求解可靠度, 这就是一次二阶矩中心点法的基本原理。

设有 n 个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 影响结构的可靠度, 其极限状态方程为

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (13-60)$$

将极限状态功能函数的基本变量 X_i ($i=1, 2, \dots, n$) 在对应的平均值 μ_{X_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 处, 按 Taylor 级数展开, 并作线性化处理, 只取一次项。因此, 极限状态方程为

$$Z \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{X_i}) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \bigg|_{\mu_{X_i}} \quad (13-61)$$

式中, $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \bigg|_{\mu_{X_i}}$ 表示 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 对 X_i 求偏导后, 用平均值 μ_{X_i} ($i=1, 2, \dots, n$) 代入后的导数值, 是常量。

对式 (13-61) 分别取均值和方差得

$$\mu_z \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (13-62)$$

$$\sigma_z^2 \approx \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \times \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \bigg|_{\mu_{X_i}} \right]^2 \quad (13-63)$$

当 Z 为线性函数时, 式 (13-62) 和式 (13-63) 较为准确, 如果为非线性函数时, 其计算结果具有一定的近似性。求得 μ_z 与 σ_z 后, 可靠指标 β 值的表达式为

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \times \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \bigg|_{\mu_{X_i}} \right]^2}} \quad (13-64)$$

一次二阶矩中心点法的主要优点有:

1) 中心点法概念清楚, 计算比较简便, 直接给出可靠指标 β 与随机变量统计参数之间的关系。

2) 当结构的可靠指标 β 较小, 即失效概率 P_f 较大时, 例如, $P_f \geq 10^{-3}$ ($\beta \leq 3.09$), P_f 值对功能函数的概率分布类型不很敏感, 即由各种合理分布算出的 P_f 值大都在同一数量级, 其精度已足够了, 具有较好的实用性。

中心点法的主要缺点:

1) 基本变量的概率分布若为非正态分布或非对数正态分布, 则可靠度指标的计算结果与实际情况出入较大。

2) 由于该法在平均值点附近将极限状态功能函数展开为泰勒级数并使其线性化, 其结果对非线性功能函数略去各次高阶项的误差, 将随着线性化点到失效边界的距离的增加而增大。一般说来, 该法选用的线性化点 (平均值点), 在可靠区而不在失效边界上, 线性化点对 β 有较大的影响。

2. 改进的一次二阶矩法

针对上面提到的一次二阶矩中心点法存在的主要缺点,人们开始在失效边界上寻求线性化点,所选取之点通常在结构最大可能失效概率对应的设计验算点 P^* (图 13-7), 以此克服中心点法存在的问题。由此得到的方法称为改进的一次二阶矩法, 可简称为“验算点法”, 这是目前结构可靠指标计算方法的基础。

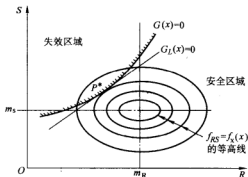


图 13-7 基本变量空间中的极限状态曲面和设计验算点

当线性化点选在设计验算点 X_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) 上时, 线性化的极限状态方程为

$$Z \approx g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^*) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{X^*} = 0 \quad (13-65)$$

极限状态函数 Z 均值为

$$Z \approx g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n (\mu_{X_i} - X_i^*) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{X^*} = \sum_{i=1}^n (\mu_{X_i} - X_i^*) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{X^*} \quad (13-66)$$

假设各随机变量相互独立, 则可求解 Z 的方差

$$\sigma_z^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\sigma_{X_i} \times \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{X^*}^2 \quad (13-67)$$

引入分离函数式, 将上面的根式线性化, 得

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \times \sigma_{X_i} \times \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{X^*} \quad (13-68)$$

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X^*}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X^*} \right)^2}} \quad (13-69)$$

α_i 表示第 i 个随机变量对整个标准差的相对影响, 因此称为灵敏系数。在变量方差已知的情况下, α_i 就完全由 X_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) 确定, 其值在 ± 1 之间, 且有 $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ 。

根据可靠指标 β 的定义, 有

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{X_i} - X_i^*) \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X^*}}{\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \sigma_{X_i} \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X^*} \right)} \quad (13-70)$$

重新排列后有

$$\sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X^*} (\mu_{X_i} - X_i^* - \beta \alpha_i \sigma_{X_i}) = 0 \quad (13-71)$$

从上可解出设计验算点

$$\mu_{X_i} - X_i^* - \beta \alpha_i \sigma_{X_i} = 0 \quad (13-72)$$

解出设计验算点 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 后, 该点还应满足

$$g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0 \quad (13-73)$$

式 (13-72) 代表 n 个方程, 再加式 (13-73) 共有 $n+1$ 个方程, 未知数为 X_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) 和 β , 共有 $n+1$ 个。尽管如此, 通过方程联立求解还是有困难的, 通常采用迭代法求解, 其步骤如下:

- 1) 选取设计验算点坐标的初值, 一般取 $X_i^* = \mu_{X_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$)。
- 2) 根据式 (13-69) 计算灵敏系数 α_i 。
- 3) 由式 (13-72) 得到 X_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) 与 β 的关系。
- 4) 由式 (13-73) 解出 β 值。
- 5) 以该 β 值代入第 3) 步所得的 X_i^* 式内, 求出 X_i^* 的新值。
- 6) 以新的 X_i^* 值重复进行第 2) 步至第 4) 步的计算, 如果所得的 β 值与上一次的 β 值之差小于允许的误差, 则计算结束。这次所求的 β 值即为所求的可靠性指标, X_i^* 值即为所确定的设计验算点坐标; 如果前后两个 β 值之差大于允许误差, 则进行第 5) 步后, 再进行第 2) 步至第 4) 步的计算, 如此反复进行, 直至求得合乎要求的结果为止。

13.3.3 可靠度分析的“JC”法

“JC”方法是由拉克维茨和菲斯莱 (Rackwitz-Fiessler)、哈索弗尔和林德 (Hasofer-Lind) 等人先后提出来的, 因为国际安全度联合委员会 (JCSS) 推荐采用这个方法, 所以通常被称为“JC”方法。JC 法适用于随机变量为任意分布下结构

可靠指标的求解, 不仅其原理通俗易懂, 而且计算精度能满足工程实际需要。

“JC”法的基本原理是, 首先将随机变量原来的非正态分布“当量”化为正态分布。“当量正态化”的条件是:

1) 在设计验算点 X_i^* , 当量正态变量 X_i' (其平均值为 $\mu_{X_i'}$, 标准差为 $\sigma_{X_i'}$) 的分布函数值 $F_{X_i'}(x_i^*)$ 与原非正态变量 (其平均值为 μ_{X_i} , 标准差为 σ_{X_i}) 的分布函数值 $F_{X_i}(x_i^*)$ 相等。

2) 在设计验算点 X_i^* 处, 当量正态变量概率密度函数值 $f_{X_i'}(x_i^*)$ 与原非正态变量概率密度函数值 $f_{X_i}(x_i^*)$ 相等 (参见图 13-8)。

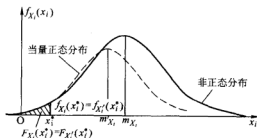


图 13-8 当量正态化

然后根据这两个条件求得当量正态分布的平均值为 $\mu_{X_i'}$ 和标准差 $\sigma_{X_i'}$ 。最后用改进的一次二阶矩法计算结构的可靠指标。

当量正态分布的平均值为 $\mu_{X_i'}$ 和标准差为 $\sigma_{X_i'}$ 分别为

$$\mu_{X_i'} = X_i^* - \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\sigma_{X_i'} \quad (13-74)$$

$$\sigma_{X_i'} = \frac{\phi[\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]]}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (13-75)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ ——标准正态分布函数;

$\Phi^{-1}(\cdot)$ ——标准正态分布的反函数;

$\phi(\cdot)$ ——标准正态分布的概率密度函数。

以上是“JC”法求当量正态分布的平均值 $\mu_{X_i'}$ 和标准差 $\sigma_{X_i'}$ 时的一般公式, 具体计算时如果遇到正态变量, 则不必作上述处理, 而直接把该变量的平均值和标准差作为“当量变量”的平均值和标准差。当随机变量为对数正态分布时, 式 (13-74) 和式 (13-75) 还可得到进一步简化。

对于复杂的极限状态方程和变异性大的随机变量, 用“JC”法计算往往不收敛或出现不合理的验算点值问题, 而 Monte-Carlo 方法不受变量变异性大以及不

受复杂迹象状态方程的限制, 不管状态函数是否非线性、随机变量是否非正态, 只要模拟的次数足够多就可以得到一个比较精确的失效概率和可靠度指标。

13.4 土工问题的优化设计

前面讨论的是用一个极限状态方程定义的单一破坏模式, 但在实际工程中, 建筑物的性状并不只取决于某种单一的破坏模式, 如挡土结构的失效模式可能为倾覆、滑移或强度不足, 因此, 应进行系统可靠性分析。如果将基础作为整个建筑物的一部分, 则涉及更大范围内的系统分析。系统分析的目的是求得最经济合理的方案, 从而进行风险条件下的优化设计。

13.4.1 多重破坏模式下的系统分析

如果一个系统的性状取决于几个破坏模式则称此系统为多重破坏模式系统, 它由若干个分量或子系统组成。有的系统有冗余分量, 而有的系统为无冗余分量。对于无冗余分量的系统, 一个分量的失效会引起整个系统的失效。设一个系统由 k 个分量组成, 第 i 个分量的失效概率为 P_{fi} , 可靠性即成功概率为 P_{si} , 这两者之间的关系为

$$P_{si} = 1 - P_{fi}$$

将一个系统分解为基本的组合元件: 串联和并联。在串联系统中, 任一分量的失效都会使整个系统失效; 而并联系统则由几个分量同时完成一个功能, 只有当每一个分量失效时, 才会使整个系统失效。

设系统的 k 个分量互相独立, 系统的失效概率按不同的基本组合模式进行如下计算。

对于串联系统, 从输入到输出是单行线路, 任一环节的破坏都会使整个系统遭到破坏, 整个系统的可靠性 R 是每个分量可靠性的乘积。对于 k 个分量的系统, 可靠性 R 与失效概率 P_f 分别为

$$R = \prod_{i=1}^k P_{si} \quad (13-76)$$

$$P_f = 1 - R = 1 - \prod_{i=1}^k P_{si} \quad (13-77)$$

对于并联系统, 从输入到输出之间有 k 条路径, 只有在全部路径破坏时整个系统才破坏, 整个系统的失效概率 P_f 为每个分量的失效概率之积。对于 k 个分量的系统, 可靠性 R 与失效概率 P_f 分别为

$$P_f = \prod_{i=1}^k P_{fi} \quad (13-78)$$

$$R = 1 - P_f = 1 - \prod_{i=1}^k P_{fi} \quad (13-79)$$

实际工程中的系统都是复杂的组合系统，都可以分解为串联和并联最基本的元件组合，然后求得整个系统的失效概率。

13.4.2 土工问题的优化设计概念

在概率极限状态法设计中，必须满足 $\beta_{\min} \geq [\beta]$ ，即结构的可靠度指标必须满足目标可靠度指标的要求。但是仅满足可靠度约束的设计并不是最合理、最经济的设计。最合理的设计应该是基于系统可靠度约束的优化设计，但系统可靠度分析存在诸多困难，一是系统的失效模式难以判别；二是各失效模式间的相关性无法确定。

优化设计中的目标函数 S 与约束条件分别为

$$S = \Phi(x_i, y_i)$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i$$

式中 x_i, y_i ——分别为可控因素与不可控因素。

优化问题与工程造价、经济分析联系在一起的，是建立在概率方法的基础上的。评价方案优劣时，如果只涉及一个因素称为单因素优化，如果涉及到几个因素称为多因素优化。下面研究在保持系统功能相同的条件下，用造价来表示目标函数的方法。

岩土工程造价由三个部分组成：①基本造价 I ；②正比例于平均能力的造价 $\lambda \bar{C}$ ；③系统破坏时需付出的代价 E_f 。在上述三项中最难估计的是 E_f ，例如大坝的毁坏会造成巨大的生命财产损失，需要做专门的经济分析。

有两种估计破坏代价的简化方法，第一种是以年破坏概率 P_a 为基础，考虑使用年限和贴现率的方法，即

$$E_f = f \times n \times P_a \times k \times E_c \quad (13-80)$$

式中 P_a ——年破坏概率，根据事故调查得出；

n ——工程使用年限；

f ——贴现率有关的系数，如 $f=1$ 表示不贴现；

k ——事故潜在危险的系数；

$E_c = I + \lambda \bar{C}$ ——施工造价。

第二种是以计算破坏概率为基础乘以综合系数 η 的方法

$$E_f = \eta \times P_a \times E_c \quad (13-81)$$

式中 η ——可以视为第一种方法中 f 与 k 的乘积，它是一个综合反映工程所处的条件与贴现率的系数，对于不贴现的情况， η 就只表示事故潜在的危险性。

总造价为以上三项的总和为

$$E = I + \lambda \bar{C} + E_f = (I + \lambda \bar{C})(1 + \eta P_f) = E_c(1 + \eta P_f) \quad (13-82)$$

式(13-82)即为目标函数的一般表达式,在 \bar{C} 和 P_f 中都包括了可控因素和不可控因素,具体的函数形式由研究对象的功能函数决定。

下面以基坑开挖边坡稳定性为例,来说明单因素问题的概念。基坑开挖工程造价为土方单价 E' (元/方)与基坑开挖方量 V 之积,即

$$E_c = E'V = E' \times f(A \cdot B \cdot H \cdot \tan \alpha)$$

式中 A, B ——分别为基坑底面的长度与宽度;

H ——基坑开挖深度;

α ——边坡坡角;

$f(\cdot)$ ——由基坑几何关系导出的关系式。由此可得到目标函数(总期望造价)

$$E = E'(1 + \eta P_f)f(A \cdot B \cdot H \cdot \tan \alpha)$$

在上式中,可控因素为坡角 α ,不可控因素为土体的抗剪强度指标 c 和 $\tan \varphi$ 。坡角 α 越小,失效概率 P_f 越小,但土方量越大、工程造价越高;反之,土方量减小,但土坡失效概率较大,要支付较大的失效代价。因此必然存在一个最佳的 α ,使得总期望造价最小。

为了表示方便,取坡角为 45° 的条件为额定条件,额定条件的工程造价为 E_0 ,则取相对造价(无价格单位)分别为 $E_c^* = \frac{E_c}{E_0}$ 、 $E^* = \frac{E}{E_0}$,相对的总造价为

$$E^* = E_c^*(1 + \eta P_f) \quad (13-83)$$

约束条件可取为

$$30^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$$

假定土的抗剪强度指标服从正态分布,抵抗力矩也服从正态分布(变异系数为 δ),中心安全系数为 $K (>1.0)$,失效概率为

$$P_f = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{K-1.0}{K \cdot \delta}\right)$$

如取 $\delta=0.10$, $\eta=10$,按式(13-83)计算的优化曲线见图13-9。从图中可以看出,最优坡角在 50° 左右,最优中心安全系数为1.28。

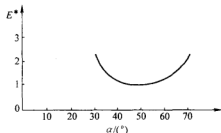


图13-9 基坑开挖(单因素)优化计算结果

对于多因素优化,如同时存在 k 个独立的破坏,假定每一种破坏模式的 $\bar{C}_j = \bar{D}_j \times K_j$, \bar{D}_j 为每种破坏模式的平均需求, K_j 为每种破坏模式的安全系数。应当用式 (13-79) 计算失效概率 P_f , 忽略交叉积的影响, 则 $P_f = \sum P_{fi}$ 。总期望造价为

$$E = (I + \lambda \bar{C})(1 + \eta P_f) = \left(I + \sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{D}_i K_i \right) \left(1 + \sum_{i=1}^k \eta_i P_{fi} \right)$$

优化的目的是找出总期望造价最小的最优组合,但是在多因素优化中,破坏时所要付出的代价可能主要取决于其中的某一个模式,按最小总期望造价优化所得的组合中可能包含着一个很高的失效概率,而其他模式的失效概率可能非常小。为了使各个模式的失效概率不致相差过分悬殊,各个失效模式比较均衡,不采用最优优点进行设计。

参 考 文 献

- 1 高大钊.地基基础工程标准化与概率极限状态设计原则.岩土工程学报,1993,15(4): 8~14
- 2 包承纲.谈岩土工程概率分析法中的若干基本问题.岩土工程学报,1989,11(4): 94~98
- 3 (日)松尾稔.地基工程学——可靠性设计的理论和实际.万国朝,李杨海等译.北京:人民交通出版社,1990
- 4 Vanmarcke E H, et al. Random fields and stochastic finite element. Structural Safety, 1986(3): 143~166
- 5 刘宁,吕泰仁.随机有限元及其工程应用.力学进展,1995,25(1): 113~126
- 6 陈虬,刘先斌.随机有限元法及其工程应用.成都:西南交通大学出版社,1993
- 7 傅旭东.钻孔灌注桩可靠度理论研究和工程应用.[博士学位论文],成都:西南交通大学,1997
- 8 傅旭东.随机有限元法及其在岩土工程中的应用.[博士后研究报告].武汉:武汉水利电力大学,2000
- 9 傅旭东,茜平一,刘祖德.边坡稳定可靠性的随机有限元分析.岩土力学,2001,22(4): 413~418
- 10 高大钊.岩土工程的可靠性分析(续二).岩土工程学报,1984,6(1): 105~114
- 11 Becker D E. Eighteenth Canadian Geotechnical Colloquium: Limit States Design for Foundations. Part II, Development for the National Building Code of Canada. Can. Geotech. J., 1996, 33: 984~1007
- 12 张建仁,刘扬,许福友等.结构可靠度理论及其在桥梁工程中的应用.北京:人民交通出版社,2003
- 13 包承纲,高大钊,张庆华.地基工程可靠度分析方法研究.武汉:武汉测绘科技大学出版社,1997